

A. Gravel.

1971

SCHALENMODELL FÜR ZWEI TEILCHEN IM KONTINUUM UND

DREIKÖRPER-PARTIALWELLENANALYSE

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von
Adolf Grauel
aus Bad Homburg v.d.H.

Frankfurt am Main

1971

RECHENWEISEN DER ZWEI BEIHALTEN IN KONTAKT UND

BEIHALTEN DER KONTAKTWEISEN

INHAUTAL-RECHENWEISEN



Erklärung des Buchhalters
der Hauptbuchhalter
vorgeliefert nach Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

Von
Adolf Grawert
aus Bad Nauheim v.d.B.

Frankfurt am Main

1971

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main.

Dekan: Prof.Dr.H.Thomas
Leiter der Arbeit: Prof.Dr.W.Greiner
Erstgutachter: Prof.Dr.W.Greiner
Zweitgutachter: Privat-Dozent Dr.W.Scheid

Tag der mündlichen Prüfung: 18.November 1971

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Überblick 1

I Zur Quantenmechanik des Dreikörper-Problems

1.1 Separation der Schwerpunktsbewegung	9
1.2 Energiekorrelierte Zweiteilchen-Koordinaten	13
1.21 Relativbewegung im Dreiteilchen-Kanal	24
1.22 Coulombwellen für ein Teilchenpaar	25
1.23 Austausch-Symmetrie	27

II Phasenanalyse der Reaktionsprodukte

2.1 Wirkungsquerschnitt	34
2.11 Elastische Streuung für zwei Teilchen ohne Spin und Ladung	37
2.12 Inelastischer Wirkungsquerschnitt für die doppelte Nukleonen-Emission	43
2.2 Schalenmodell-Beschreibung des Zweiteilchen-Kontinuums	55
2.3 Dreiteilchen-R-Matrix	63
2.4 Andere Approximationsmöglichkeiten für einen Drei- körper-Aufbruch	66

III Konvergenzverhalten des energiekorrelierten Schalenmodells

3.1 Kernmodell für die doppelte Nukleonen-Emission	70
3.2 Erste Resultate einer Phasenanalyse für eine $(d, 2n)$ - Reaktion	79

IV Kritik des Modells und Ausblick 86

Zusammenfassung 88

Anhang 91

Tabellen 113

Literaturverzeichnis 120

Abstract

A scattering theory for reactions with three-particle channels above the two-particle threshold is developed. To solve this nuclear problem the R-matrix-technique is used for the calculation of the extended S-matrix. Correlated two-particle wave functions describe the exact two-particle continuum. For the usual shell model potential with limited depth and finite range only a few partial waves dominate. The cross section depends on the energy-distribution between the two outgoing particles. Numerical results are presented for the $(d, 2n)$ -reaction exciting O^+ -states in O^{16} . The treatment is restricted to $(2p2h)$ -states with the particles in the (sd) -shell and holes in the p -shell.

Überblick

In der modernen Kernphysik liefert die Nukleonen-Streuung neben der Elektronen-Streuung ein wichtiges Hilfsmittel, Kernstrukturen zu untersuchen und insbesondere konzipierte Kernmodelle zu testen. Eingeschränkt wird diese Möglichkeit dadurch, daß ein ins Kerninnere eindringendes Teilchen eine dauernde Änderung der inneren Struktur (inneres Bahn-Rearrangement) hervorruft. Abgesehen von dieser Schwierigkeit, darf die Behandlung der Ein-Nukleonen-Streuung als wohlbekannt vorausgesetzt werden. Die Behandlung der doppelten Nukleonen-Emission ist hierzu ungleich schwieriger, da drei Koordinaten für das zweite Teilchen zusätzlich auftreten. Die Untersuchungen an solchen Kernreaktionen mit drei Ejektilen sind von besonderem Interesse, weil sie Informationen geben über den Reaktionsablauf (prompter Zerfall, Stufenprozeß), die Clusterstruktur und über eine eventuelle Korrelation von Teilchenpaaren. Solche Dreiteilchen-Reaktionen, die wir im Folgenden betrachten wollen, sind nicht mit den üblichen Methoden (beispielsweise der Lippmann-Schwinger-Gleichung) zu behandeln, weil diese zu Divergenzen in der Streuamplitude führen können [2].

Die folgenden Graphen zeigen die wichtigsten Typen von Dreiteilchen-Reaktionen. Hierbei soll X das Target und Y den Restkern charakterisieren. a ist das Projektil und b_1, b_2 bzw. b die Ejektile. Für Photonenanregung ist die Nukleonenlinie ——— sinngemäß durch die Photonenlinie ——— zu ersetzen. Abb. 1a zeigt den allgemeinsten Prozeß mit drei Teilchen im Eingang und einer Fragmentierung in drei Bruchstücke.

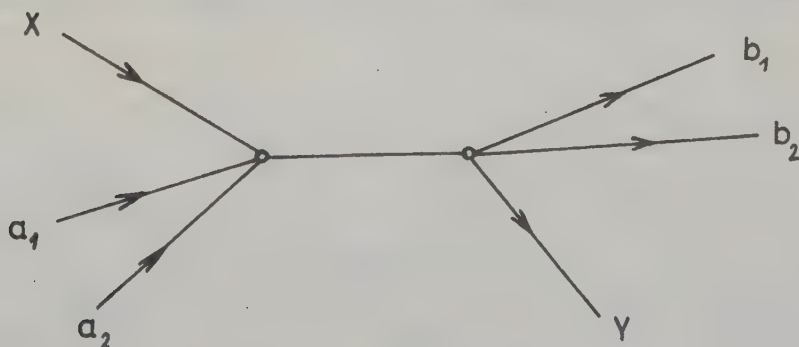


Abb 1a) 3 Teilchen im Eingangs - und Ausgangskanal

Einen simultanen Zerfall eines Compoundkerns in drei Bruchstücke, hervorgerufen durch Nukleonen-Anregung, zeigt die Abb.1b

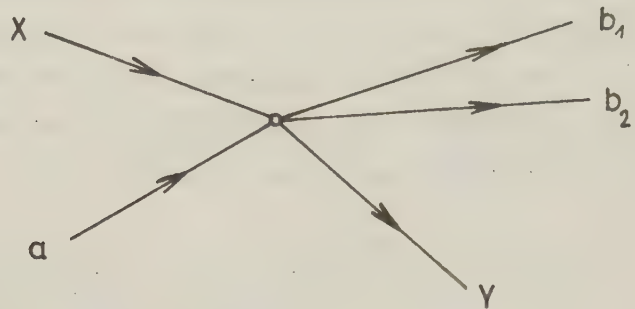


Abb.1b) Simultaner Aufbruch

Eine andere Zerfalls-Möglichkeit ist der Stufenzerfall (sequential decay) Abb.1c, bei dem ein angeregter Zwischenkern Y_1 mit endlicher Lebensdauer gebildet wird. Dieser Zwischenzustand kann durch Emission eines zweiten Nukleons oder über eine γ -Kaskade seine Energie abgeben.

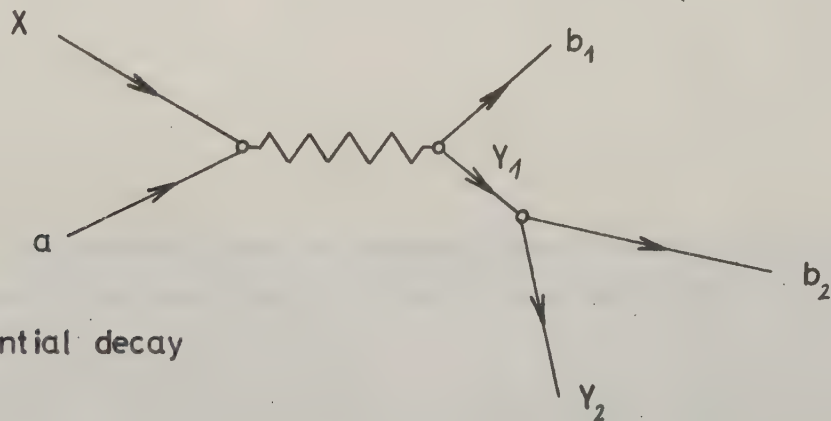


Abb. 1c) sequential decay

Die Abbildung 1d zeigt den Zerfall des Compoundkerns durch eine von Deuteronen induzierte Reaktion, die wir später näher untersuchen werden.

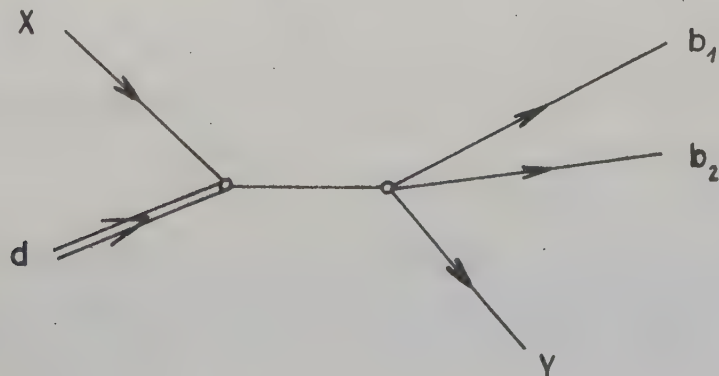


Abb. 1d) Deuteron induzierte Reaktion

Als Konsequenz der schwachen Bindungsenergie des Deuterons ist ein stripping-Prozess möglich. Hierbei dringt eines der Nukleonen in den Kern ein, während das andere fast ungehindert die ursprüngliche Bahn beibehält. Dieses ist im wesentlichen ein direkter Prozess, für den eine R-Matrix-Berechnung von Rock und Goldfarb [13], für kleine Einschußenergien und die Drehimpulse $l=0$ und 1 , durchgeführt wurde. Die experimentelle Prüfung an der Reaktion $D(d,p)H^3$ von Gückel und Mitarbeiter [13] ergab, daß eine R-Matrix-Behandlung sinnvoll ist.



Abb. 1e) stripping

Verlaufen die Teilchenbahnen im Ausgangskanal noch viele Kernradien vom Restkern entfernt parallel, so liegt der Fall einer proximity scattering vor.

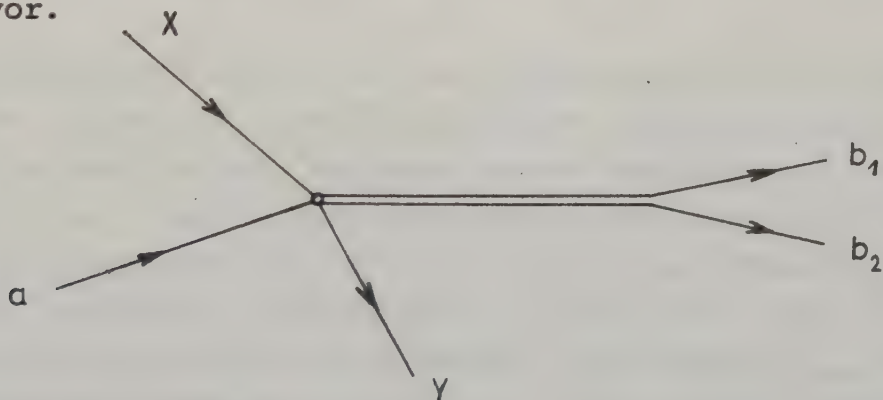


Abb. 1f) proximity scattering

Im Falle einer rescattering streut eines der Teilchen im Ausgang in den Bereich des Restkerns zurück und hinterläßt einen Endkern Y_2 .

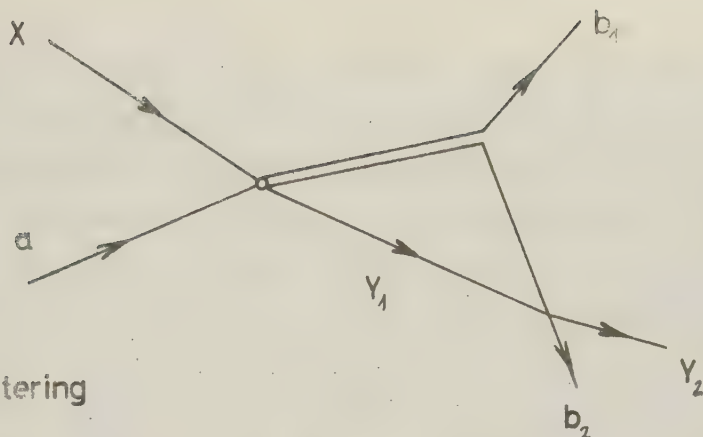


Abb. 1g) rescattering

Der hochenergetische, quasifreie knockout-Prozeß streift ein oder mehrere relativ lose am Rumpf gebundene Teilchen ab. Beispielsweise, falls a eine Protonenlinie ist, kann b_1 bzw. b_2 ein Neutron oder Proton sein.

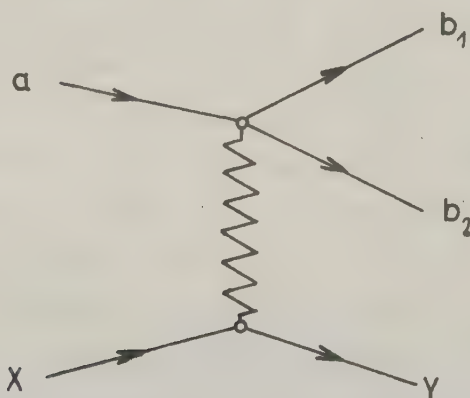


Abb. 1h) knockout

Für die mathematische Lösung des quantenmechanischen Mehrteilchen-Streuproblems ist es in diesem Zusammenhang verständlich, zuerst nach passenden Koordinaten, mathematischen Methoden und Approximationen zu suchen, die der physikalischen Situation wohl angepaßt sind. Dazu beginnen wir mit dem Studium der Kinematik der Endfragmente, bestehend aus Restkern und einem, bzw. zwei Teilchen. Ein Kontinuumsteilchen nimmt die gesamte Kanalenergie $E_{rel} = E - E_{CM} - E_f$ auf und bewegt sich relativ zum Restkern mit scharfem Impuls $p = (2mE_{rel})^{1/2}$ und der Kanalcoordinate r . Die S-Matrix-Elemente lassen sich in dem üblichen Klassifikationsschema nach einem Satz von Quantenzahlen dem Gesamtdrehimpuls, seiner Projektion, dem Kanalspin, dem Bahndrehimpuls des Teilchens etc. spezifizieren. Für eine Fragmentierung in zwei Teilchen und Restkern ist die

Situation grundsätzlich anders, weil sich die gesamte Kanalenergie E_{rel} in einer nicht definierten Verzweigung $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ auf die beiden Teilchen aufteilt. ε_1 bzw. ε_2 überstreichen demnach einen kontinuierlichen Bereich innerhalb des Intervalls $0 \leq \left\{ \begin{smallmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{smallmatrix} \right\} \leq E_{rel}$ mit der Maßgabe, daß $E_{rel} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ immer erfüllt ist. Die asymptotische Gestalt der Streufunktion läßt sich durch einen Produktansatz realisieren, der nach dem üblichen Schalenmodell naheliegend ist. In dieser Streufunktion besitzen die beiden Kontinuums-
teilchen scharfe Impulse $\hbar k_1$ und $\hbar k_2$. Andererseits überstreichen ihre Energien einen kontinuierlichen Bereich, so daß der Produktansatz keine passende Basis darstellt, weil zur Beschreibung eines physikalischen Zustandes ein Kontinuum von Kanälen notwendig ist. Wir sehen hier, daß das Schalenmodell-Konzept nicht kritiklos zu verwenden ist. Nach diesem Modell bewegen sich die Nukleonen unabhängig voneinander in einem mittleren Potential analog einem Elektron unter dem Einfluß der bekannten elektrischen Kräfte, die der sehr viel schwerere Kern und die übrigen Elektronen auf das herausgegriffene Teilchen ausüben. Für die Bewegung eines Nukleons im Kern ist dieses sicher nicht zutreffend, da das Nukleon nur seine nächsten Nachbarn "sieht" und sich deshalb im Feld dieser Nachbar-Nukleonen bewegt. Mit anderen Worten, die Nukleonen beeinflussen das Potential, in dem sie sich bewegen, sehr viel stärker als die Elektronen das ihrer Hülle. Aus diesem Grund sind die Fluktuationen vom mittleren Feld und die Korrelationen der Nukleonen untereinander von besonderem Interesse. Soll beispielsweise ein Teilchenaustausch berücksichtigt werden, dann ist dieses nur sinnvoll in einem Modell mit Teilchenkorrelationen zu erreichen [19]. Wir betrachten deshalb den Kern als ein korreliertes Nukleonensystem, wobei der Bewegung aller Nukleonen eine wichtige Rolle zukommt und führen eine Radialkoordinate und Korrelationskoordinaten ein (die genaue Spezifikation erfolgt später im Text). In zweifacher Hinsicht ist dieses bedeutungsvoll: erstens erreichen wir Eindeutigkeit bezüglich der Anschlußbedingungen am Matching-Radius von Innen- und Außenraum-Lösung, und zweitens erreichen wir eine gewisse Analogie zu den Zweiteilchen-Reaktionen. Eine wichtige Folgerung im Anhang A3 zeigt, daß das Konzept nicht auf das Zweiteilchen-Kontinuum beschränkt ist, sondern auch Mehrteilchen-Kontinua adäquat behandelt werden können.

Die Aufgabe der zu entwickelnden Mehrteilchen-Streutheorie ist es, zur Energie E Streulösungen im gesamten Raumbereich und eine brauchbare Entwicklung für die Streumatrix zu finden. Dazu verschaffen wir uns eine diskrete Basis, nach der dann die tatsächlichen Wellenfunktionen entwickelt und die Streumatrix bestimmt wird. Prinzipiell gibt es dazu zwei Möglichkeiten dieses zu verwirklichen: entweder man führt Randbedingungen ein, die zu einem diskreten Spektrum führen, oder man löst das Streuproblem mit einem effektiven Hamiltonoperator. Die Randbedingungen für die Dreiteilchen-Reaktionen können nun verschieden gewählt werden. Gehören sie zu auslaufenden Wellen, dann sind die Eigenwerte komplex und energieabhängig. Reelle, energieunabhängige Randbedingungen, R-Matrix Randbedingungen [3] und Randbedingungen von asymptotisch richtigen Wellen zur Streuenergie E , wie sie in der Eigenkanal-Theorie EKT von Danos, Greiner und Wahsweiler [4] benutzt werden, ergeben reelle Eigenwerte. Nur in der EKT ist ein kontinuierlicher Übergang der Streulösungen am Matching-Radius gegeben, allerdings ist die transzendente Gleichung $E=E(\delta)$ zu lösen [6]. Vermeidet man die Einführung von Kanalradien, so sind die Energieabhängigkeit und die komplexen Parameter implizit gegeben. Für einen effektiven Hamiltonoperator [5] ist der Antisymmetrisierung und der Teilchen-Umordnung besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Insbesondere bedürfen auch die formalen Theorien, die den Hamiltonoperator aufteilen und phänomenologische Potentiale einführen, die Eingangs- und Endzustands-Wechselwirkungen berücksichtigen sollen, einer kritischen Betrachtung.

Diese Arbeit stellt einen ersten Versuch dar, bei Dreiteilchen-Reaktionen ohne die Einführung phänomenologischer Potentiale auszukommen. Das Zweiteilchen-Kontinuum berücksichtigen wir exakt durch korrelierte Basis-Wellenfunktionen. Zu diesem Zweck wird die R-Matrix für Dreiteilchen-Reaktionen eingeführt. Die Berechnung der S-Matrix und damit der Partialquerschnitt für die Dreiteilchen-Phasenanalyse erfolgt dann über die R-Matrix-Technik. Die Korrelationskoeffizienten, gegenüber dem Modell unabhängiger Teilchen, werden explizit bestimmt.

Im ersten Abschnitt wird, zunächst für das Dreikörper-Problem, die Schwerpunkts-Bewegung von der Relativ-Bewegung getrennt. Für die Relativ-Bewegung der beiden Teilchen wird dann eine Darstellung diskutiert, die es gestattet, mit korrelierten Basiswellenfunktionen exakt das Zweiteilchen-Kontinuum zu behandeln. Der zweite Abschnitt bringt eine Phasenanalyse der Reaktionsprodukte. Im Rahmen eines Modells berechnen wir schließlich im dritten Abschnitt den Wirkungsquerschnitt für eine $(d,2n)$ -Reaktion und untersuchen das Konvergenzverhalten. Dem letzten Abschnitt sind Anwendungsfragen und eine Modellkritik gewidmet.

I Zur Quantenmechanik des Dreikörper-Problems

Zunächst erscheint es notwendig, sich mit der Geometrie des Dreikörper-Problems vertraut zu machen. Die Lage dreier Körper ist eindeutig im Raum durch 9 Koordinaten definiert. Durch Abtrennung der Schwerpunktsbewegung reduziert sich ihre Zahl auf 6. Diese 6 Koordinaten können wie folgt gewählt werden: entweder wir benutzen die beiden Vektoren der Relativbewegung $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ und $(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$, für die sich ein einfacher Ausdruck für die kin. Energie ergibt, oder wir führen drei Eulerwinkel für die Lage der drei Teilchen in Bezug auf ein raumfestes Achsenkreuz und drei Gestaltskoordinaten des Dreiecks ein, für deren Festlegung es drei Möglichkeiten gibt. Wählt man eine Länge und zwei Winkel, dann bleibt die Gestalt des Dreiecks ähnlich, und für die kin. Energie ergibt sich ein einfacher Ausdruck (Zickendraht [28]). Für die beiden andern Möglichkeiten durch drei Längen bzw. zwei Längen und *einen* Winkel die Gestalt des Dreiecks festzulegen, ergeben sich keine einfachen Ausdrücke für die kin. Energie [29]. Jedoch sei hier angemerkt, daß hier keines der drei Teilchen eine bevorzugte Rolle spielt (geeignet für Probleme, in denen entweder alle drei Teilchen gleich oder sehr verschieden sein können) bzw. zwei der drei Teilchen gegenüber dem dritten bevorzugt werden können.

Wir verwenden die beiden Vektoren der Relativbewegung als Koordinaten, bei dem der Spezialfall enthalten ist, daß eines der drei Teilchen ausgezeichnet ist. Gilt

$$\left| \mathcal{K}_{m_1} - \mathcal{K}_{m_2} \right| \ll \left| \mathcal{K}_{m_3} - \frac{m_1 \mathcal{K}_{m_1} + m_2 \mathcal{K}_{m_2}}{m_1 + m_2} \right|$$

dann ist das 3. Teilchen, wie wir später sehen werden, ausgezeichnet.

1. 1 Separation der Schwerpunkts-Bewegung

Die Schrödinger-Gleichung für das Dreikörper-Problem im Laborsystem lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} \Delta_{\vec{r}_{m_1}} + \frac{1}{m_2} \Delta_{\vec{r}_{m_2}} + \frac{1}{m_3} \Delta_{\vec{r}_{m_3}} \right) \Psi + V(x_{m_1}, \dots, z_{m_3}) \Psi = E \Psi$$

mit (1)

$$\Psi = \Psi(x_{m_1}, \dots, z_{m_3})$$

$V(x_{m_1}, \dots, z_{m_3})$ steht für die Wechselwirkungsenergie zwischen den drei Körpern. $\vec{r}_{m_1}$, $\vec{r}_{m_2}$ und $\vec{r}_{m_3}$ sind die Radiusvektoren im Laborsystem zu den drei Massenpunkten m_1 , m_2 und m_3 . Da im allgemeinen die theoretischen Untersuchungen einfacher im Schwerpunktsystem oder Relativsystem auszuführen sind, werden Relativkoordinaten eingeführt. Die zur Beschreibung notwendigen 9 Ortskoordinaten der drei Teilchen werden durch 6 Relativkoordinaten (Jacobi-Koordinaten)

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{m_1} - \vec{r}_{m_2} \quad (2)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{m_3} - \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}_{m_1} - \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}_{m_2}$$

und durch die 3 Koordinaten des Schwerpunkts

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \left\{ m_1 \vec{r}_{m_1} + m_2 \vec{r}_{m_2} + m_3 \vec{r}_{m_3} \right\} \quad (3)$$

eindeutig charakterisiert. Dabei ist $\vec{r}_1$ ein Vektor, der von Teilchen 2 nach 1 und $\vec{r}_2$ vom Schwerpunkt dieses Systems nach Teilchen 3 zeigt. $\vec{r}_S$ ist der Schwerpunktsvektor, der zum gesamten Schwerpunkt zeigt. M ist die Summe aus den Einteilchenmassen

$$M = \sum_{i=1}^3 m_i$$

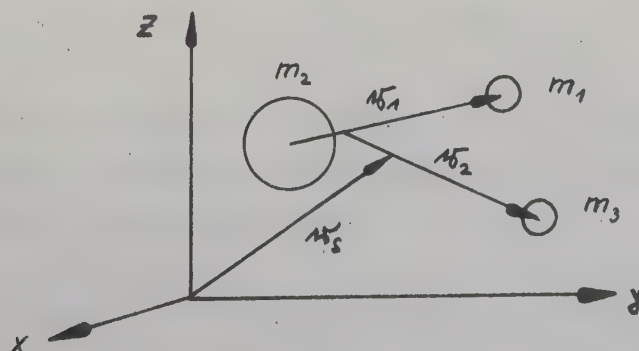


Abb.2

Analog finden wir für die Relativimpulse und den Schwerpunkts-Impuls

$$k_1 = k_{m_1} - k_{m_2},$$

$$k_2 = k_{m_3} - \frac{m_1}{m_1+m_2} k_{m_1} - \frac{m_2}{m_1+m_2} k_{m_2}, \quad (4)$$

$$k_s = \frac{1}{M} (m_1 k_{m_1} + m_2 k_{m_2} + m_3 k_{m_3}).$$

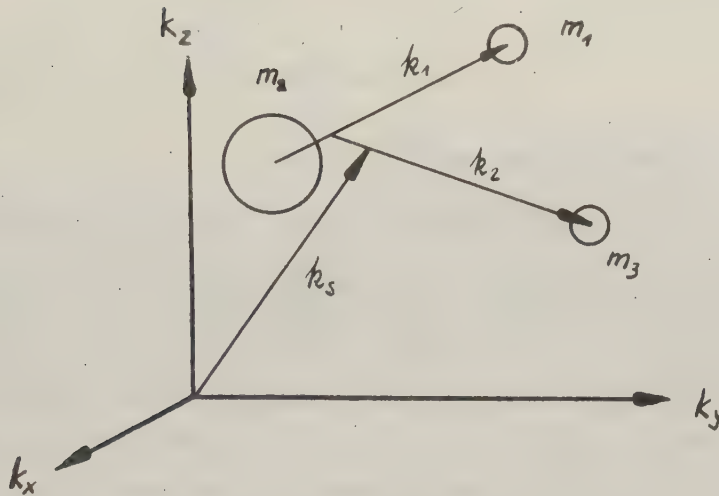


Abb. 3

Der Vektor k_1 zeigt von Teilchen 2 nach Teilchen 1, k_2 zeigt vom Teilschwerpunkt, der aus Masse m_1 und m_2 gebildet wird, zum Teilchen 3, und k_s ist der Schwerpunkts-Impuls. Mit den Gleichungen (2), (3) und (4) ist die Kinematik festgelegt, die den gewünschten Übergang vom Laborsystem in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten gestattet.

Den wesentlichen Einfluß auf das Konvergenzverhalten, einer Entwicklung der Zweiteilchenbasis nach unkorrelierten Schalenmodell-Zuständen, hat die Wechselwirkung $V(x_{m_1}, \dots, z_{m_3})$ der drei Teilchen untereinander. Wird angenommen, daß die Kraft zwischen den Teilchen 1 und 2, sowie 2 und 3 als Gradient eines Potentials dargestellt werden kann, das nur vom Abstand der Konstituenten abhängt, so ist eine einfache Separation wie folgt möglich

$$V(x_{m_1}, \dots, z_{m_3}) = \mathcal{V}_1(r_1) + \mathcal{V}_2(r_2) + \mathcal{V}(r_{12}). \quad (5)$$

Hierbei ist $\mathcal{V}(r_{12})$ die zwischen Teilchen 1 und 3 wirksame Wechselwirkung (siehe Abb. 2), für die ebenfalls die einfache Annahme der Abstandsabhängigkeit angenommen wird.

Damit ist eine exakte Abtrennung der Schwerpunktsbewegung möglich. Für die Dreiteilchen-Schrödinger-Gleichung erhalten wir sodann (siehe Anhang A1)

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left\{ \frac{1}{\mu_1} \Delta_1 + \frac{1}{\mu_2} \Delta_2 + \frac{1}{M} \Delta_{SP} - (\mathcal{V}_1(r_1) + \mathcal{V}_2(r_2) + \mathcal{V}(r_{12})) \right\} \Psi = E \Psi. \quad (6)$$

Die reduzierten Massen sind wie folgt definiert

$$\mu_1 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{M} \quad (7)$$

Setzen wir den Separationsansatz

$$\Psi = \Phi(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \cdot \varphi(\mathcal{K}_{SP}) \quad (8)$$

in Gleichung (6) ein, dann erhalten wir

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta_{SP} \varphi}{\varphi} - E = \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{\Delta_1 \Phi}{\Phi} + \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \frac{\Delta_2 \Phi}{\Phi} - \{ \mathcal{V}_1(r_1) + \mathcal{V}_2(r_2) + \mathcal{V}(r_{12}) \}. \quad (9)$$

Da die rechte Seite nicht von den Schwerpunkts- und die linke nicht von den Relativ-Koordinaten abhängt, werden beide Seiten gleich einer gemeinsamen Konstanten $-\mathcal{E}$ gesetzt. Führen wir ferner die Abkürzung $E_{SP} = E - \mathcal{E}$ ein, dann folgt für die Schwerpunktsbewegung

$$H_{SP} \varphi = E_{SP} \varphi \quad \text{mit} \quad H_{SP} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{SP} \quad (10a)$$

und die Relativbewegung

$$H \Phi = \mathcal{E} \Phi \quad \text{mit} \quad H = \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \Delta_1 + \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \Delta_2 + \{ \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V} \}. \quad (10b)$$

Die Funktion $\varphi(\mathcal{K}_{SP})$ beschreibt die kräftefreie Schwerpunktsbewegung analog einem freien Teilchen mit der Masse $M = m_1 + m_2 + m_3$, dargestellt durch ein Wellenpaket der Form

$$\int |\varphi(\mathcal{K}_{SP})|^2 d\tau = 1 \quad \text{mit} \quad \varphi(\mathcal{K}_{SP}) = \int a(k) \cdot e^{i k \mathcal{K}} d^3 k.$$

Gleichung (10b) beschreibt die Relativbewegung der Teilchen so, als wäre Teilchen 2 in Ruhe und Teilchen 1 und 3 würden sich mit den Massen μ_1 und μ_2 gegen m_2 unter dem Einfluß ihrer Wechselwirkungskräfte bewegen.

Der Hamiltonoperator (10b) läßt sich auch mit $h_i = -\frac{\hbar^2}{2\mu_i} \Delta_i + \mathcal{V}_i$,
wie folgt darstellen

$$H = \sum_{i=1}^2 h_i + \sum_{i \neq j} \mathcal{V}(r_{ij}) + \sum_{k=1}^3 H_k(q_{kf}) \quad (11)$$

Die letzte Summe berücksichtigt die innere Bewegung der 3 Fragmente, auf die genau $f = (3A - 9)$ Freiheitsgrade entfallen.

Wie wir gesehen haben, läßt sich durch die Annahme, daß das Potential nur von der relativen Lage der Teilchen abhängt, die Schwerpunktsbewegung separieren. Das Dreiteilchensystem reduziert sich auf ein Zweiteilchensystem, die Verallgemeinerung auf N-Körper ist straight forward.

1.2 Energiekorrelierte Zweiteilchen-Koordinaten

Die Energie E_{rel} der Relativbewegung im Dreiteilchen-Kanal ist die Differenz zwischen der totalen Kanalenergie E und der Schwerpunkts- und Endenergie des (A-2)-Teilchensystems

$$E_{rel} = E - E_{sp} - E_f . \quad (12)$$

Diese Energie des kontinuierlichen Zweiteilchen-Spektrums (Abb. 4) nehmen die beiden Kontinuumsteilchen auf

$$\frac{(\hbar k)^2}{2m} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 . \quad (13)$$

Eine elementare Umformung auf die Einteilchen-Impulse liefert die fundamentale Gleichung für die Zweiteilchen-Wellenzahl

$$k^2 = \left(\frac{k_1^2}{\mu_1} + \frac{k_2^2}{\mu_2} \right) m . \quad (14)$$

Diese Gleichung lösen wir durch Einführung eines Energie-Korrelationswinkels β nach den Einteilchen-Wellenzahlen auf

$$k_1 = \left(\frac{\mu_1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} k \cos \beta , \quad k_2 = \left(\frac{\mu_2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} k \cos \beta . \quad (15)$$

Mit $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ist (k_1, k_2) in eindeutiger Weise (k, β) zugeordnet. Für den asymptotischen Bereich

$$(r_1, r_2) > R_0 \text{ (Kernradius) ,}$$

erhalten wir aus Gleichung (15) eine Relation zwischen den dynamischen Größen k_1 und k_2 und den Koordinaten r_1 und r_2 :

$$\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{v_2/t}{v_1/t} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r_2}{r_1} = \operatorname{tg} \alpha . \quad (16)$$

Die hier eingeführte Zeit ist diejenige Zeit, die vergeht, bis beide Teilchen die Koinzidenz-Apparatur erreichen. Gleichung (16) läßt offen, von welcher Art die Korrelation der beiden Kontinuumsteilchen ist. Insbesondere sehen wir, daß der Korrelationswinkel β weder von einer räumlichen Lokalisation noch einer bestimmten Konstellation der beiden Teilchen abhängt. Vielmehr übernimmt das Energie-Verhältnis $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ die zentrale Rolle (siehe unten).

Doppelte Nukleonen - Emission

Abregung über γ -Kaskade

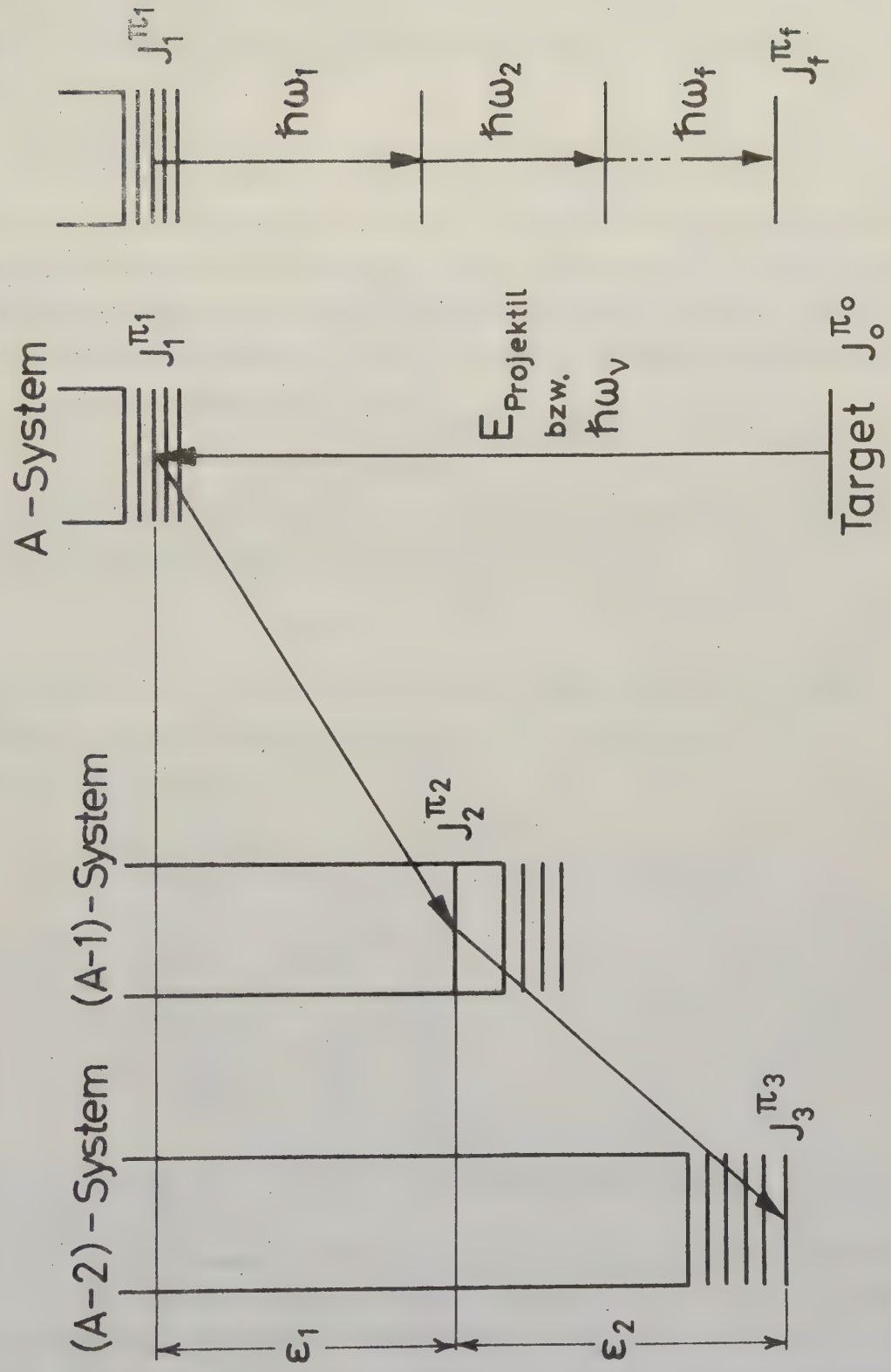


Abb. 4

Die rechte Seite von Gl. (16) erlaubt uns (siehe Sattelpunktsbedingung im Abschnitt Coulombwellen) die Relativkoordinaten r_1 und r_2 durch die Zweiteilchen-Koordinaten r und α darzustellen [9]

$$r_1 = \left(\frac{m}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r \cdot \cos \alpha \quad \text{und} \quad r_2 = \left(\frac{m}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r \cdot \sin \alpha \quad (17)$$

Die Zweiteilchen-Koordinate $r = \left(\frac{\mu_1}{m} r_1^2 + \frac{\mu_2}{m} r_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$ charakterisiert die relative Bewegung im Dreiteilchen-Kanal, und der Koordinaten-Korrelationswinkel $\alpha = \arctg\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{r_2}{r_1}$ zeigt an, mit welchem Gewicht die beiden Konstituenten r_1 und r_2 beteiligt sind. Die bewegte Masse im Dreiteilchen-Kanal ist

$$m = (\mu_1 \mu_2)^{\frac{1}{2}}$$

Ist die Masse m_2 groß gegen die Teilchenmassen m_1 und m_3 , dann folgt für das geometrische Mittel

$$m \approx (m_1 \cdot m_3)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

Sind überdies m_1 und m_3 noch gleich (Nukleonen einer Sorte), dann entfallen die Massenfaktoren in der Gleichung (17).

Geometrisch folgt dann für Gl. (17)

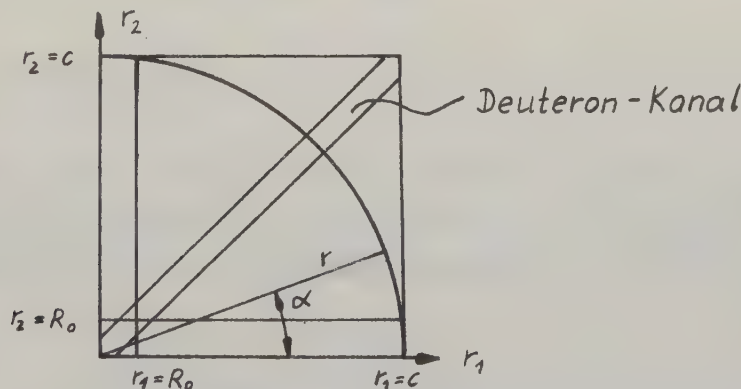


Abb. 5

Aus Abb. 5 lassen sich sofort in dynamischer Hinsicht zwei Spezialfälle extrahieren

- Ist r_1 beispielsweise die Relativkoordinate für das Neutron und r_2 die für das Proton, dann erhalten wir einen Clusterkanal für das Deuteron, wobei $r_1 = r_2 = \frac{r}{\sqrt{2}}$ ist.
- Falls $r_1 \ll r_2$ oder $r_2 \ll r_1$ ist, dann haben die beiden Teilchen sehr verschiedene Relativenergien. Mit anderen Worten, hier reicht die Anregungsenergie des Compoundkerns für einen Dreikörper-Aufbruch nicht aus.

Vielmehr kann ein Rearrangement energetisch nach der ersten Nukleonenmission einem zweiten Nukleon das Eintauchen in das Einteilchen Kontinuum ermöglichen - es kommt zu einem Stufenzerfall (Abb 1c).

Die Dynamik derartiger Prozesse, die sich mit den oben eingeführten Koordinaten beschreiben lassen, soll in den nächsten Abschnitten ausführlich diskutiert werden. Dazu müssen wir die Dgl., die solche Prozesse beschreibt, von den (r_1, r_2) - in die (r, α) -Koordinaten transformieren und lösen. Durch den Übergang von $\{r_1, r_2, \vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2\}$ nach $\{r, \alpha, \vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2\}$ ergibt sich für das Volumenelement

$$dr = r^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 dr d\alpha d\vartheta_1 d\varphi_1 d\vartheta_2 d\varphi_2$$

und für das Oberflächenelement

$$d\Omega = r^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha d\Omega_1 d\Omega_2 .$$

Mit den Zweiteilchen-Koordinaten Gl. (17) transformieren wir den Hamilton-Operator Gl. (10b) in die (r, α) -Koordinaten und erhalten

$$\left\{ \frac{1}{r^5} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^5 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \right. \\ \left. \frac{\Delta \vartheta_1, \varphi_1}{r^2 \cos^2 \alpha} + \frac{\Delta \vartheta_2, \varphi_2}{r^2 \sin^2 \alpha} - \tilde{\mathcal{V}}_1 - \tilde{\mathcal{V}}_2 - \tilde{\mathcal{V}} \right\} \Phi(r, \alpha, \vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) = 0 \quad (19)$$

Die Tilde über den Potentialen bedeutet eine Multiplikation mit $\frac{2m}{\hbar^2}$. Die einfachsten Kernpotentiale $\tilde{\mathcal{V}}_1(r_1)$ und $\tilde{\mathcal{V}}_2(r_2)$, unter dessen Einfluß sich die Teilchen bewegen, sind ein konstantes Potential

$$\{ \mathcal{V}_1 \text{ bzw. } \mathcal{V}_2 \} = -V_0 \quad (20)$$

oder ein parabelförmiges Potential

$$\mathcal{V}_1(r_1) = -V_0 + \eta_1^2 r_1^2 \quad (21a)$$

und entsprechend für das zweite Teilchen

$$\mathcal{V}_2(r_2) = -V_0 + \eta_2^2 r_2^2 \quad (21b)$$

Für gleiche Steifigkeit $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ des Parabelpotentials in r_1 - und r_2 -Richtung, folgt für Gl. (21) die einfache Form (Abb. 6)

$$\mathcal{V}_1(r_1) + \mathcal{V}_2(r_2) = -2V_0 + \eta^2 r^2 \quad (22)$$

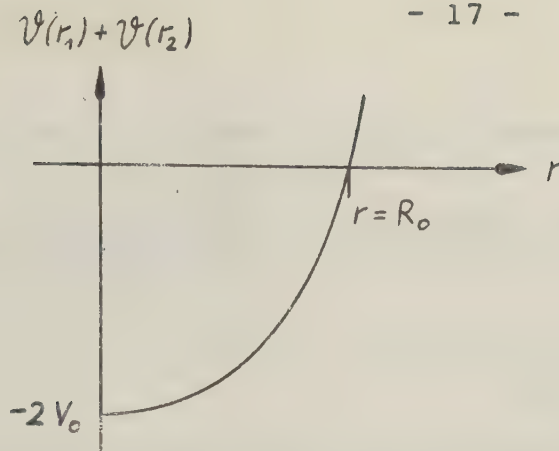


Abb. 6

Die Konstante η bestimmen wir aus der Forderung, daß am Kernrand $r=R_0$ das Potential verschwindet (Abb 6)

$$\eta^2 = 2V_0 R_0^{-2}. \quad (23)$$

Damit erhalten wir für das Potential zweier Teilchen

$$V_1(r_1) + V_2(r_2) = -2V_0(1 - r^2 R_0^{-2}). \quad (24)$$

Den WW -Term $V(r_{12})$ können wir für viele Fälle durch eine Konstante approximieren. Mit diesen Potentialansätzen bleibt Gleichung (19) separabel. Für die Streutheorie in Schalenmodell-Beschreibung repräsentieren diese Potentiale eine sinnvolle Ausgangsbasis für das zu lösende Vielteilchen-Problem.

Als Anwendungsbeispiel für das parabelförmige Potential konstruieren wir im Anhang A2 das Energiespektrum für einen sechs-dimensionalen Oszillator für zwei Teilchen, die Verallgemeinerung auf n Teilchen ist leicht durchzuführen. Mit einem Separationsansatz trennen wir die Relativbewegung im Dreiteilchen-Kanal von der Korrelation und dem Winkelanteil ab.

$$\Phi(r, \alpha, \Omega_1, \Omega_2) = \frac{R(r)}{r^2} \cdot K(\alpha) \cdot W(\Omega_1, \Omega_2) \quad (25)$$

Mit $W(\Omega_1, \Omega_2) = Y_{l_1 m_1}(\vartheta_1, \varphi_1) \cdot Y_{l_3 m_3}(\vartheta_2, \varphi_2)$ erhalten wir folgende Gleichungen

(26a)

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left\{ k^2 - \left(\frac{l_1 + l_3 + 2n + 2}{r} \right)^2 - \tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V} \right\} R = 0,$$

und für den Koordinaten-Korrelationswinkel α

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left(\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{dK}{d\alpha} \right) - \left(\frac{l_1(l_1+1)}{\cos^2 \alpha} + \frac{l_3(l_3+1)}{\sin^2 \alpha} - \left\{ (l_1+l_3+2n+2)^2 - 4 \right\} \right) K = 0 \quad (26b)$$

Gleichung (26a) beschreibt die relative Bewegung in den energetisch positiven als auch energetisch negativen oder geschlossenen, energiekorrelierten Dreiteilchen-Kanälen für zwei ungeladene Nukleonen. Die normierten Lösungen $K_{l_1, l_3, n}$ aus Gleichung (26b) sind bis auf einen Vorfaktor die bekannten Eigenfunktionen des symmetrischen Kreisels [8], auf die wir nochmals im nächsten Abschnitt, im Zusammenhang mit der Austausch-Symmetrie für ein Teilchenpaar, zurückkommen werden.

$$K_{l_1, l_3, n}(\alpha) = \left(\frac{2(l_1+l_3+2n+2)}{\sin 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} d_{\frac{1}{2}(l_1+l_3+1), \frac{1}{2}(l_1-l_3)}^{\frac{1}{2}(l_1+l_3+1)+n}(2\alpha) \quad (27)$$

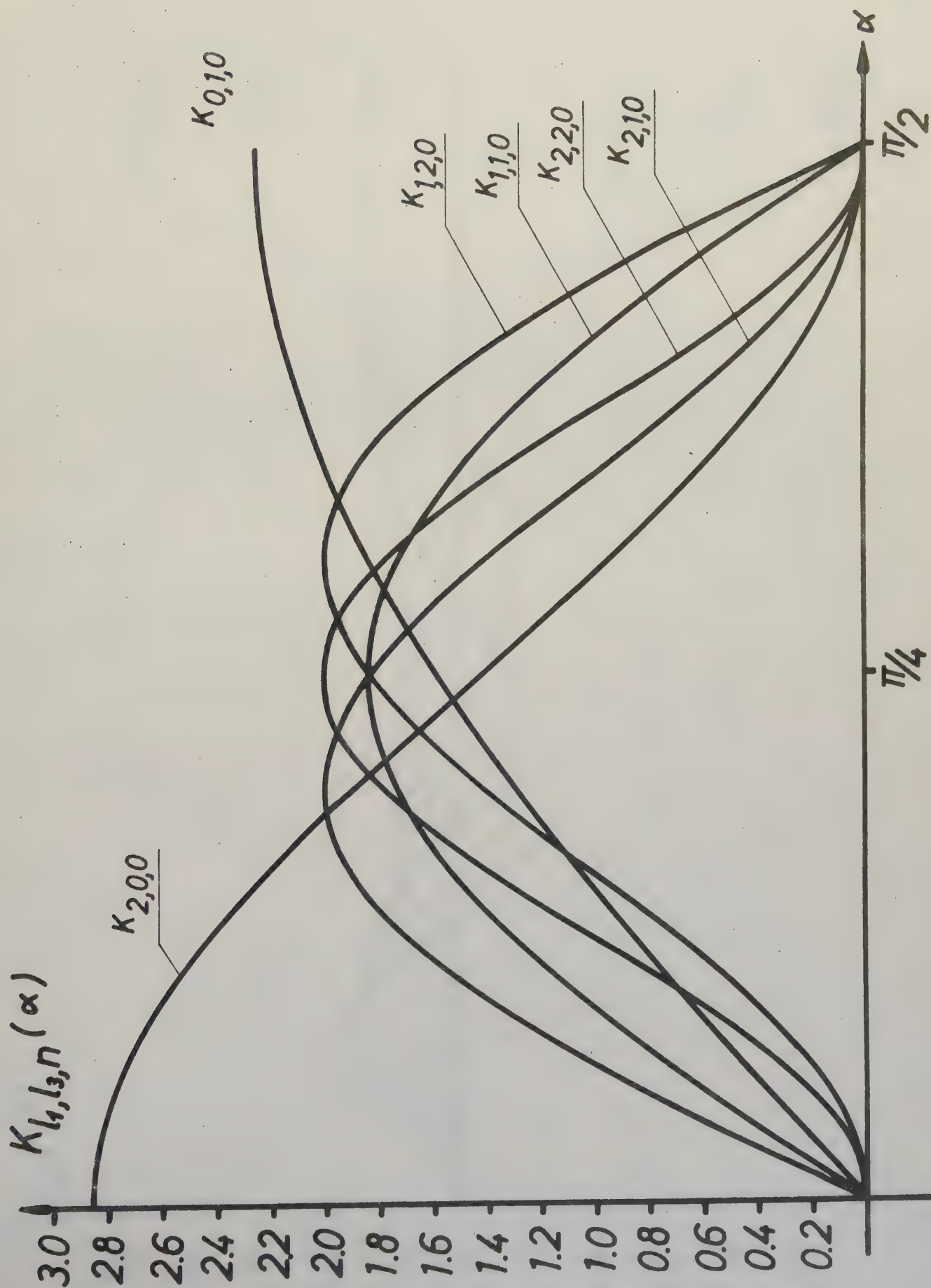
Spezialformeln für $K_{l_1, l_3, n}(\alpha)$ sind in Tabelle I zusammengestellt, die Abbildungen 7 zeigen einige typische Korrelationsfunktionen. $\alpha = \arctg r_2/r_1$ ist der oben eingeführte Koordinaten-Korrelationswinkel. Die diskreten Zahlen n , die wir für konstante Energieverhältnisse bekommen, nennen wir Korrelationsquantenzahlen. Aufgrund der Gl. (16) gilt Gleichung (27) auch sinngemäß für den Winkel β der Energie-Korrelation. Die Integralform Gl. (34) für die Zweiteilchenfunktion, die für jeden Impuls gilt, insbesondere auch für einen diskreten Impuls $\hbar k_p$, veranschaulicht die Struktur der Teilchenkorrelation

$$\Phi_{l_1, l_3, n; k_p}(r, \alpha) = (-)^n \frac{k_p^2}{2\pi} \int_0^\pi K_{l_1, l_3, n}^*(\beta) \cdot j_{l_1}(k_p \cos \beta r_1) \cdot j_{l_3}(k_p \sin \beta r_2) \sin^2 2\beta d(2\beta) \quad (28)$$

Die Energien der Einteilchenfunktionen $j_{l_1}(k_1 r_1)$ und $j_{l_3}(k_2 r_2)$ liegen innerhalb des Energieintervalls $0 \leq (\epsilon_1, \epsilon_2) \leq \epsilon_p$. Die Korrelationsfunktion $K_{l_1, l_3, n}^*(\beta)$ korreliert die beiden Einteilchenfunktionen innerhalb des angegebenen Intervalls. Die Abbildungen 7 zeigen, daß die Korrelationsfunktion eine stark veränderliche Funktion in Abhängigkeit von den Drehimpulsen l_1, l_3 und n ist. Sie korreliert Teilchenpaare mit Konstituenten aus verschiedenen Energiebereichen. Charakteristische Korrelationsfunktionen in der

niedrigsten Ordnung zeigt die Abb. 7a. Für diesen Fall mit $n=0$ erhalten wir keine Knoten innerhalb des Intervalls $0 \leq \{\alpha, \beta\} \leq \frac{\pi}{2}$. Bezüglich $\beta = \frac{\pi}{4}$ (d.h. $k_1 = k_2$) erhalten wir symmetrische Kurven für ein p- ($l_1 = l_2 = 1$), d-Teilchenpaar ($l_1 = l_2 = 2$) etc. und leicht asymmetrische Kurven für ein (pd)- oder (dp)-Teilchenpaar. Im ersten Fall simuliert die Korrelationsfunktion einen Drehimpulsaustausch. Breite Verteilungen im k-Raum, gegenüber den Funktionen mit $n \neq 0$, führen im Ortsraum zu einer Lokalisation eines Teilchenpaares. Diese Lokalisation allein ist eine notwendige Bedingung für short range correlations (SRC), die hinreichend wird, falls sich die beiden Nukleonen in einem Wechselwirkungsvolumen von der Größenordnung $(1,8 \text{ fm})^3$ aufhalten. Für ein (ds)-, bzw. (sp)-Teilchenpaar oder ähnliche Teilchenpaare liegt das Maximum bei $\beta=0$ bzw. $\beta=\frac{\pi}{2}$. Dieses Verhalten der Korrelationsfunktion $K_{l_1, l_2, n}$ für $n=0$ ist leicht verständlich, da diese proportional zu $\sin^2 \beta \cos^2 \beta$ ist (siehe Tabelle I), sie hat somit an den Intervallgrenzen einen sinus- oder cosinusähnlichen Charakter. In einem solchen Fall korreliert die Korrelationsfunktion nur dann zwei Einteilchenfunktionen mit den Energien ϵ_1 und ϵ_2 merklich, wenn die Energie des ersten Teilchens $\epsilon_1 > \epsilon_2$ bzw. $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ist. Analog gilt dieses auch für die Funktionen, bei denen $n \neq 0$ ist. Bei den Korrelationsfunktionen (Abb. 7b bis 7d) für ein (sd)-, (ds)- und ein d-Teilchenpaar etc. mit $n \geq 1$ kann n ebenfalls mit der Knotenzahl identifiziert werden. Für diese Fälle ergeben sich rasch veränderliche Funktionen, die zu langreichweitigen Komponenten, long range correlations (LRC), führen.

Sind aus einem Koinzidenz-Experiment die Winkel- und Energie-Verteilung der Reaktionsprodukte bekannt, so lassen sich die Partialwellen bestimmen. Über die Korrelationsfunktion erhalten wir Informationen über die Teilchenkorrelation.



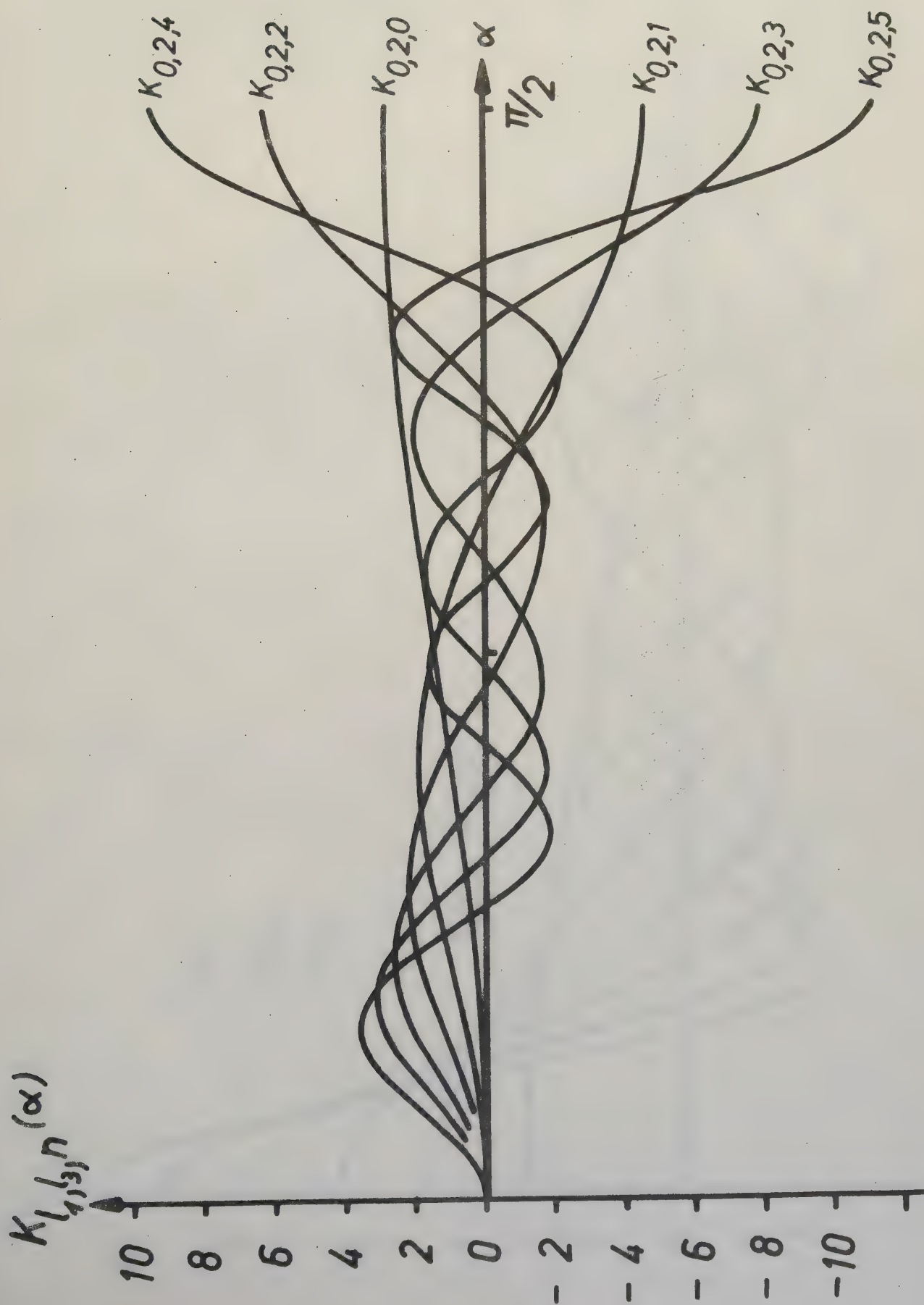


Abb. 7b

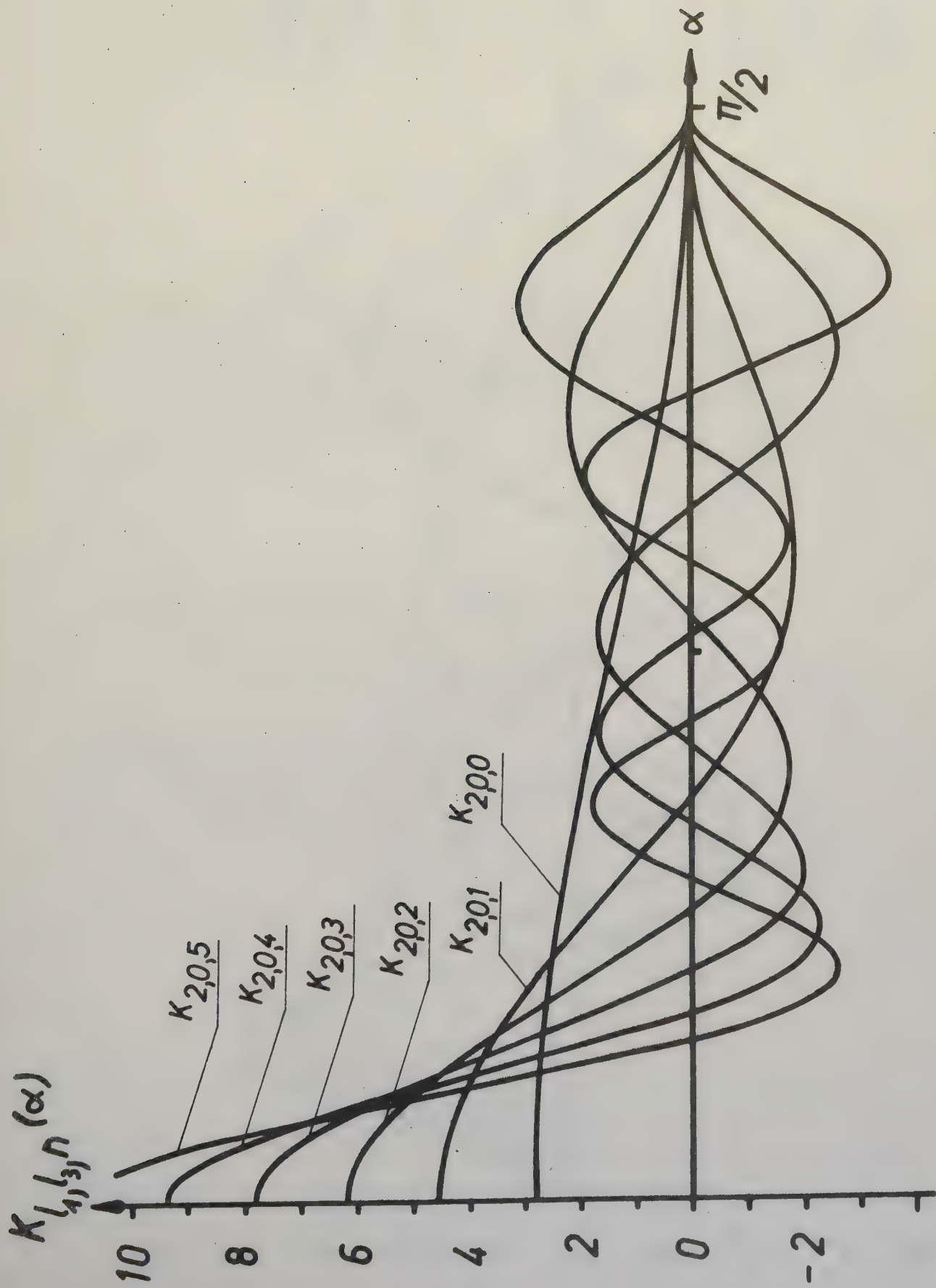


Abb. 7c

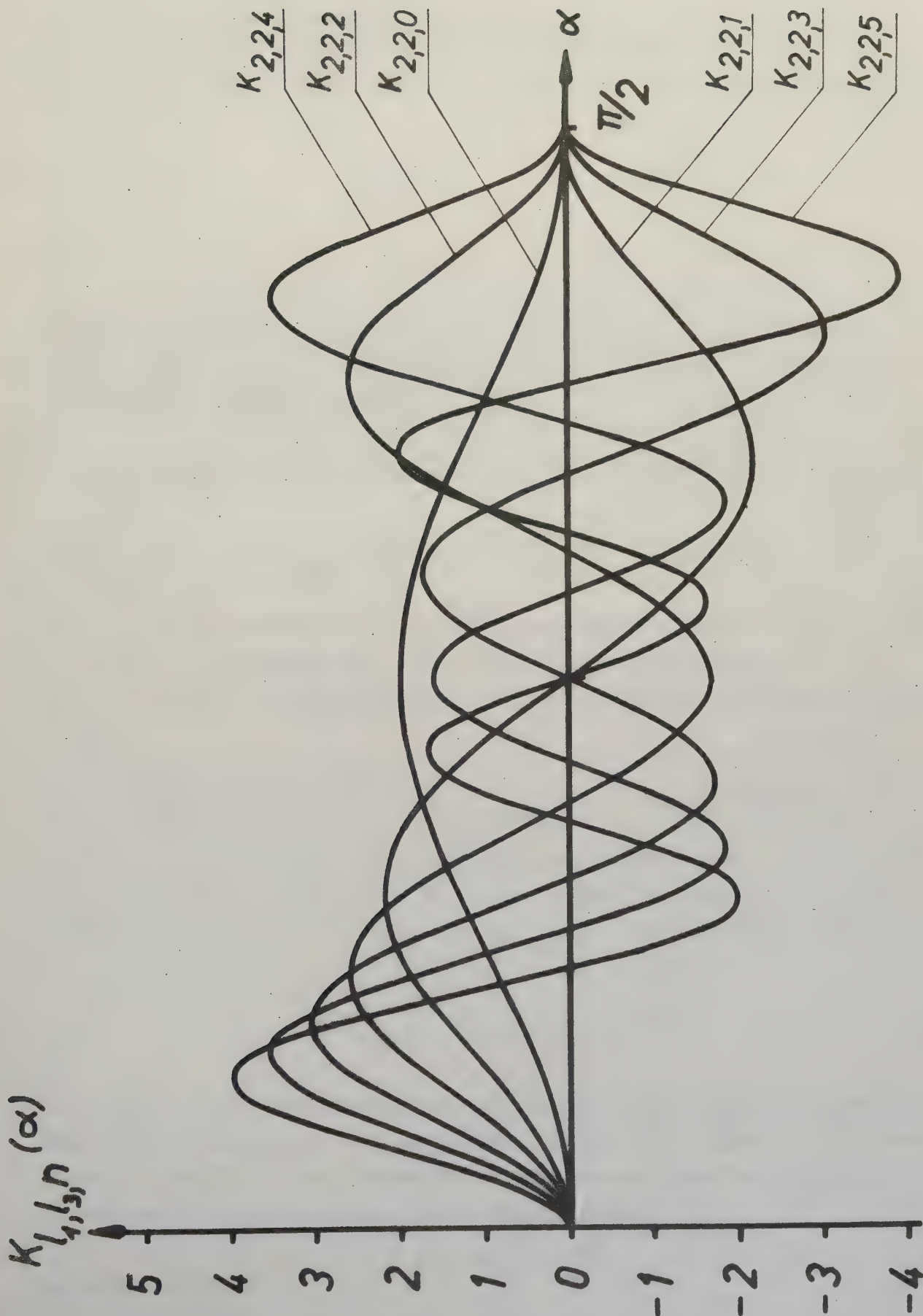


Abb. 7d

1. 21 Relativbewegung im Zweiteilchen-Kanal

Die beiden linear unabhängigen Lösungen von Gleichung (26a) für $r > R_0$ sind die regulären bzw. irregulären Lösungen $F_{l_1, l_3, n}(r)$ bzw. $G_{l_1, l_3, n}(r)$. Für Neutronen haben sie die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} F_{l_1, l_3, n}(r) &\approx J_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(kr) , \\ G_{l_1, l_3, n}(r) &\approx N_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(kr) . \end{aligned} \quad (29)$$

$F_{l_1, l_3, n}$ ist eine reelle Funktion, die der Dgl. (26a) genügt und bei $r=0$ verschwindet. $G_{l_1, l_3, n}$ ist durch ihr asymptotisches Verhalten aus (26a) bestimmt. Damit lassen sich in der üblichen Weise, für die positiven Energiekanäle, ein- und auslaufende Zweiteilchen-Wellen aufbauen

$$\begin{aligned} I_{l_1, l_3, n}^+ &= G_{l_1, l_3, n} - i F_{l_1, l_3, n} = \exp \left\{ -i \left(kr - \frac{\pi}{2} (l_1 + l_3 + 2n + \frac{3}{2}) \right) \right\} , \\ O_{l_1, l_3, n}^+ &= G_{l_1, l_3, n} + i F_{l_1, l_3, n} = \exp \left\{ i \left(kr - \frac{\pi}{2} (l_1 + l_3 + 2n + \frac{3}{2}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

Ist die Gesamtenergie im Zweiteilchen-Kanal negativ, dann erhalten wir die Lösungen aus (26a) durch Transformation mit $\tilde{r} = ir$ und $\tilde{k}^2 = -\tilde{x}^2$. Die Lösungen sind die modifizierten Besselfunktionen

$$I_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(\tilde{x}r) \text{ und } K_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(\tilde{x}r) \text{ mit } \tilde{x} = \frac{1}{\hbar} (2mE)^{\frac{1}{2}} ,$$

wobei die erste Funktion aufklingenden und die zweite abklingenden Charakter besitzt. Für die gebundenen Zustände hat nur die modifizierte Besselfunktion $K_{l_1 + l_3 + 2n + 2}$ die richtige Asymptotik

$$O_{l_1, l_3, n}^- = K_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(\tilde{x}r) . \quad (31)$$

Die $I_{l_1, l_3, n}^-$ -Funktionen erhalten wir durch analytische Fortsetzung der $I_{l_1, l_3, n}^+$ -Funktionen für negative Energie. Die Phase für die Streufunktion erfährt hier, gegenüber dem Zweiteilchenfall, eine Modifikation. Der Drehimpuls l kann formal durch

$$L = l_1 + l_3 + 2n + \frac{3}{2} \quad (32)$$

ersetzt werden.

1. 22 Coulombwellen für ein Teilchenpaar

Die entsprechenden Funktionen für geladene Teilchen sind nicht durch elementare Funktionen darzustellen, weil diese nicht nur von kr , sondern auch von dem Ladungsparameter η abhängen. Für diesen Fall konstruieren wir energiekorrelierte Coulombwellen über das Produkt zweier Einteilchenfunktionen. Mit der Reihendarstellung für das Produkt zweier Besselfunktionen [10], erhalten wir folgende Form

$$j_{l_1}(k_1 r_1) \cdot j_{l_3}(k_2 r_2) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \cdot \Phi_{l_1, l_3, n}(r, \alpha) \cdot K_{l_1, l_3, n}(\beta) \quad (33)$$

mit

$$\Phi_{l_1, l_3, n} = r^{-2} \cdot J_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(kr) \cdot K_{l_1, l_3, n}(\alpha)$$

$K_{l_1, l_3, n}(\alpha)$ bzw. $K_{l_1, l_3, n}(\beta)$ ist die wohlbekannte Korrelationsfunktion, für die Einteilchen-Koordinaten bzw. Wellenzahlen.

$\Phi_{l_1, l_3, n}$ fassen wir als Entwicklungskoeffizient der Korrelationsfunktion $K_{l_1, l_3, n}(\beta)$ auf. Für die Zweiteilchenbasis folgt dann

$$\Phi_{l_1, l_3, n}(r, \alpha) = (-)^n \cdot \frac{k^2}{\pi} \int_0^{\pi} K_{l_1, l_3, n}^*(\beta) \cdot j_{l_1}(kr \cos \beta) \cdot j_{l_3}(kr \sin \beta) \cdot \sin^2 2\beta \cdot d(2\beta). \quad (34)$$

Analoge Formeln ergeben sich für die Hankelfunktionen $H_{l_1 + l_3 + 2n + 2}^{(1), (2)}(kr)$, die proportional ein- und auslaufenden Dreiteilchenwellen sind.

Mit den Coulombwellen für zwei auslaufende Teilchen konstruieren wir, analog Gl. (34), die auslaufende Coulomb-Paarwelle.

$$\theta_{l_1, l_3, n}^+(kr, \eta_1, \eta_2) \cdot r^{-2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} C(\beta) \cdot \frac{O_{l_1}^+(k_1 r_1, \eta_1) \cdot O_{l_3}^+(k_2 r_2, \eta_2)}{k_1 k_2 r_1 r_2} \sin^2 2\beta \cdot d\beta$$

$$\propto \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} C(\beta) \cdot \frac{\sin^2 2\beta}{(kr)^2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta} \cdot \exp(i \{kr$$

$$(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) - \eta_1 \ln(2k_1 r_1) - \eta_2 \ln(2k_2 r_2) + \sigma_{l_1} + \sigma_{l_3} - \frac{\pi}{2}(l_1 + l_3)\} \cdot d\beta.$$

Die Auswertung erfolgt nach der Sattelpunktmethode. Hier wird der Integrationsweg über die tiefste Einsenkung, d.h. über den Sattelpunkt, geführt. Mit anderen Worten, bei der Berechnung des Integrals genügt es, die Integrationsbeiträge aus der unmittelbaren Umgebung derjenigen Sattelpunkte zu ermitteln, die vom Integrationsweg überschritten werden. Die Sattelpunkte für $f(\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ liegen bei

$$\frac{d}{d\beta} f(\beta) = 0 \quad , \quad \text{d.h. bei } \beta = \alpha \quad \text{bzw. } \alpha \pm n\pi. \quad (35)$$

Mit $i\cos(\alpha-\beta) \approx i(1-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2)$ und der Substitution $W = \alpha - \beta$ ergibt sich ein Fehlerintegral für die auslaufende Coulomb-Paarwelle. Seine Auswertung liefert

$$\sigma_{l_1, l_3, n}^+(kr, \eta_1, \eta_2) \propto C(\alpha) \cdot \left(\frac{2}{kr\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\{i(kr - (\eta_1 + \eta_2) \cdot \ln 2kr - \phi)\} \quad (36)$$

Die Phase

$$\phi = \eta_1 \ln(\cos^2\alpha) + \eta_2 \ln(\sin^2\alpha) - (\sigma_{l_1} + \sigma_{l_3}) + \frac{\pi}{2}(l_1 + l_3 + 1) \quad (37)$$

ist abhängig von den Korrelationswinkeln α und β . Die Coulombphasen σ und die Coulombparameter η sind gegeben durch

$$\sigma_1 = \sum_{l=1}^{l_1} \arctg\left(\frac{\eta_1}{\frac{l}{2}}\right) \quad \text{mit } \eta_1 = \frac{ZZ_1 e^2 m_1}{\hbar^2 k \cos\beta} \quad (38)$$

bzw.

$$\sigma = \sum_{l=1}^{l_3} \arctg\left(\frac{\eta_2}{\frac{l}{2}}\right) \quad \text{mit } \eta_2 = \frac{ZZ_2 e^2 m_3}{\hbar^2 k \sin\beta}$$

Die Coulombparameter und damit die Coulombphasen hängen über $\beta = \arctg(\epsilon_2/\epsilon_1)^{\frac{1}{2}}$ vom Energieverhältnis der Ejektile ab. Die Abhängigkeit führt zu einer energieabhängigen Phasenverschiebung ϕ . Trägt nur ein Teilchen eine Ladung, dann reduziert sich die Phase auf

$$\phi = \eta_2 \ln(\sin^2\alpha) - \sigma_{l_2} + \frac{\pi}{2}(l_1 + l_3 + 1) \quad (39)$$

Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die hier konstruierten Coulomb-Paarwellen nicht Lösung der Gl. (26a) mit Coulombpotential sind.

1.23 Austausch-Symmetrie

Die Gesamtwellenfunktion

$$\Phi_{l_1 l_3 n} = \frac{R_{l_1 l_3 n}(r)}{r^2} \cdot K_{l_1 l_3 n}(\alpha) \cdot W(\Omega_1, \Omega_2) \quad (40)$$

die den Streuvorgang beschreibt, muß antisymmetrisch gegenüber der Vertauschung der Relativkoordinaten der beiden Teilchen sein, da eine antisymmetrisierte Wellenfunktion im Innenbereich nur an eine antisymmetrische Außenraumfunktion angeschlossen werden kann. Wir haben folgende Vertauschungsoperation durchzuführen.

$$\begin{aligned} \psi_1 &\rightarrow \psi_2 \\ \psi_2 &\rightarrow \psi_1 \end{aligned} \quad (41)$$

Hierbei läßt die Vertauschung den Gesamtschwerpunkt der drei Teilchen ungeändert. Der Permutationsoperator läßt die Koordinate r ungeändert, weil die Zweiteilchen-Koordinate eine homogen quadratische Funktion in den Koordinaten r_1 und r_2 ist. Der Koordinaten-Korrelationswinkel α ist durch $\frac{\pi}{2} - \alpha$ zu ersetzen. Für diese Transformation geht r_1 in r_2 und r_2 in r_1 über. Für die Korrelationsfunktion (siehe explizite Darstellung Tabelle II und die Abb. 8) folgt mit $\tau = \frac{1}{2}(l_1 + l_3 + 1)$ und $x = \frac{1}{2}(l_1 - l_3)$

$$\tilde{K}_{l_1 l_3 n}(\alpha) = \left(\frac{l_1 + l_3 + 2n + 2}{\sin 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ d_{\tau, x}^{\tau+n}(2\alpha) - (-)^n \cdot d_{x, -\tau}^{\tau+n}(2\alpha) \right\}. \quad (42)$$

Insgesamt erhalten wir mit Gl. (41) und (42)

$$\begin{aligned} \Phi_{l_1 l_3 n} = & \frac{R_{l_1 l_3 n}(r)}{r^2} \cdot \left(\frac{l_1 + l_3 + 2n + 2}{\sin 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ d_{\tau, x}^{\tau+n}(2\alpha) \cdot \left(Y_{l_1 m_1}(\vartheta_1 \varphi_1) \otimes Y_{l_3 m_3}(\vartheta_2 \varphi_2) \right)_{m_L}^L - \right. \\ & \left. (-)^{n - (l_1 + l_3 + L)} \cdot d_{x, -\tau}^{\tau+n}(2\alpha) \cdot \left(Y_{l_1 m_1}(\vartheta_2 \varphi_2) \otimes Y_{l_3 m_3}(\vartheta_1 \varphi_1) \right)_{m_L}^L \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Es ist leicht zu sehen, daß sich die Drehimpulsfkt. nur um einen Phasenfaktor unterscheiden. Für die Spin- und Isospin-Funktionen sind die entsprechenden Operationen ebenso leicht durchführbar. Die Norm der Korrelationsfunktion $K_{l_1 l_3 n}$ ist einfach zu bestimmen: Die Korrelationsfunktion ist proportional der Eigenfunktion des

symmetrischen Kreisels $K_{l_1 l_2 n}(\alpha_1) \sim D_{I \cdot I}^J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, für die wohlbekannte Orthogonalitätsrelationen gelten.

Letztlich sei erwähnt, daß nach dem Vorangegangenen die Erweiterung auf Vier- und Mehrteilchenprobleme keine zusätzlichen Schwierigkeiten entstehen.

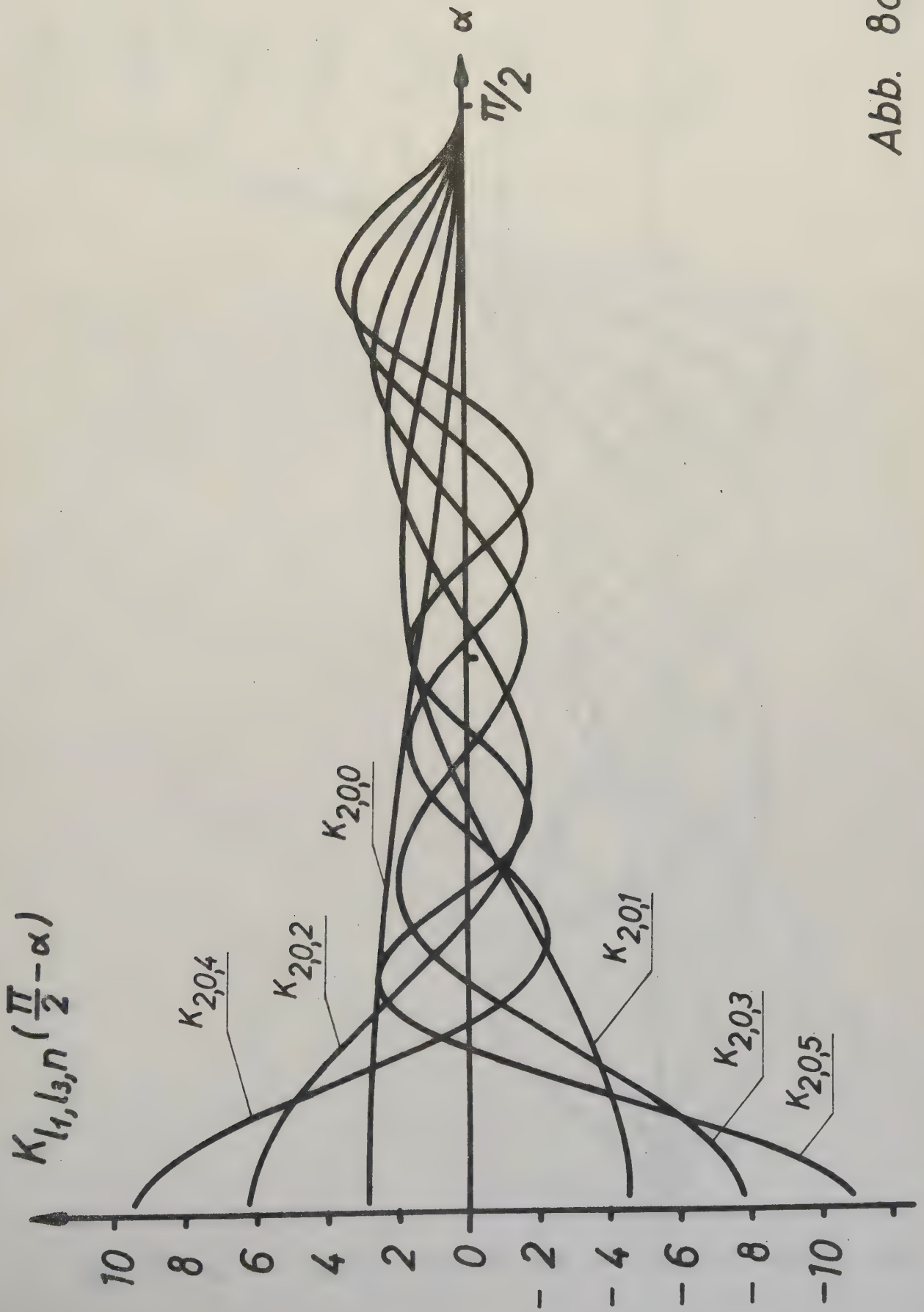


Abb. 8a

Abb. 8b

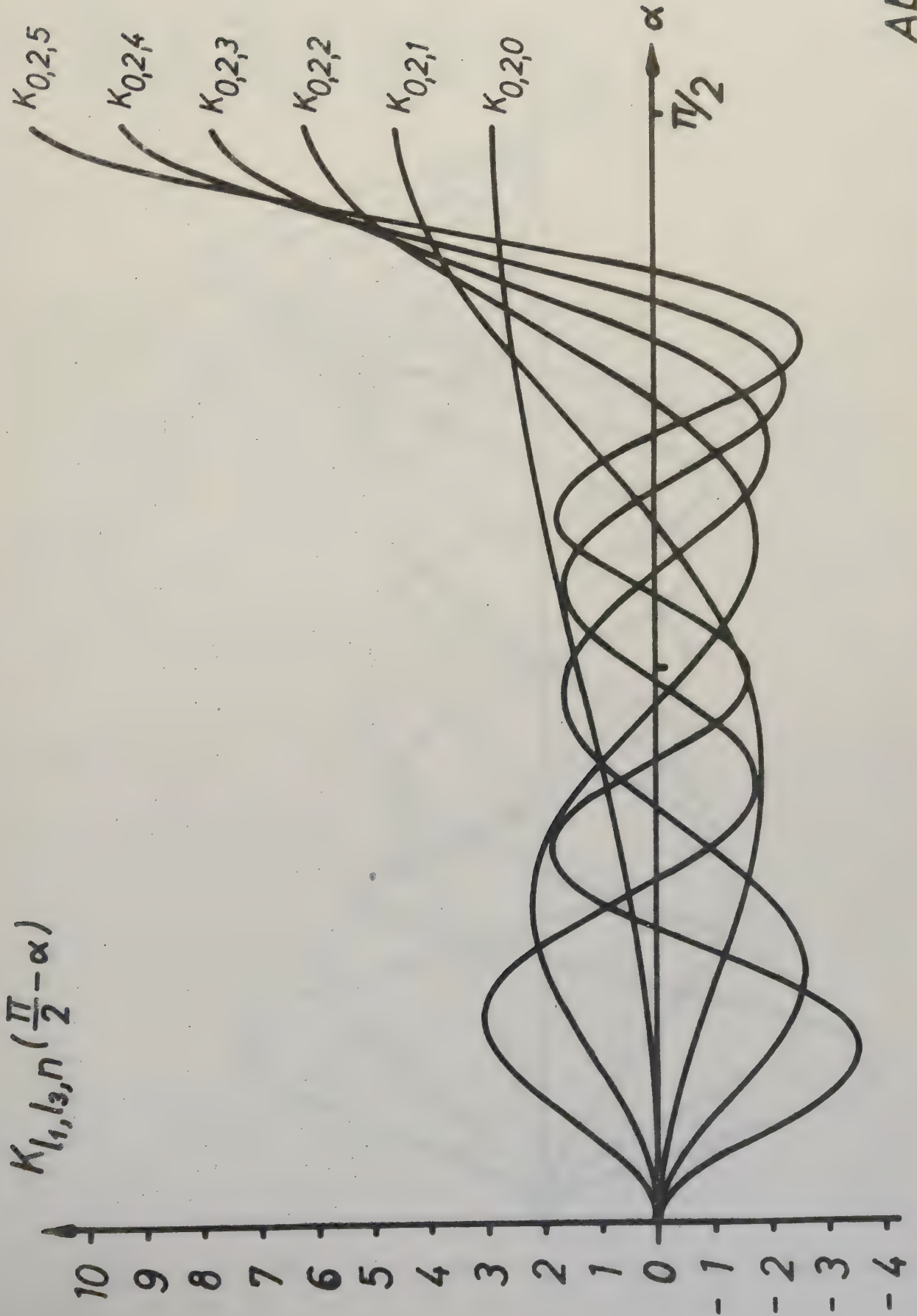
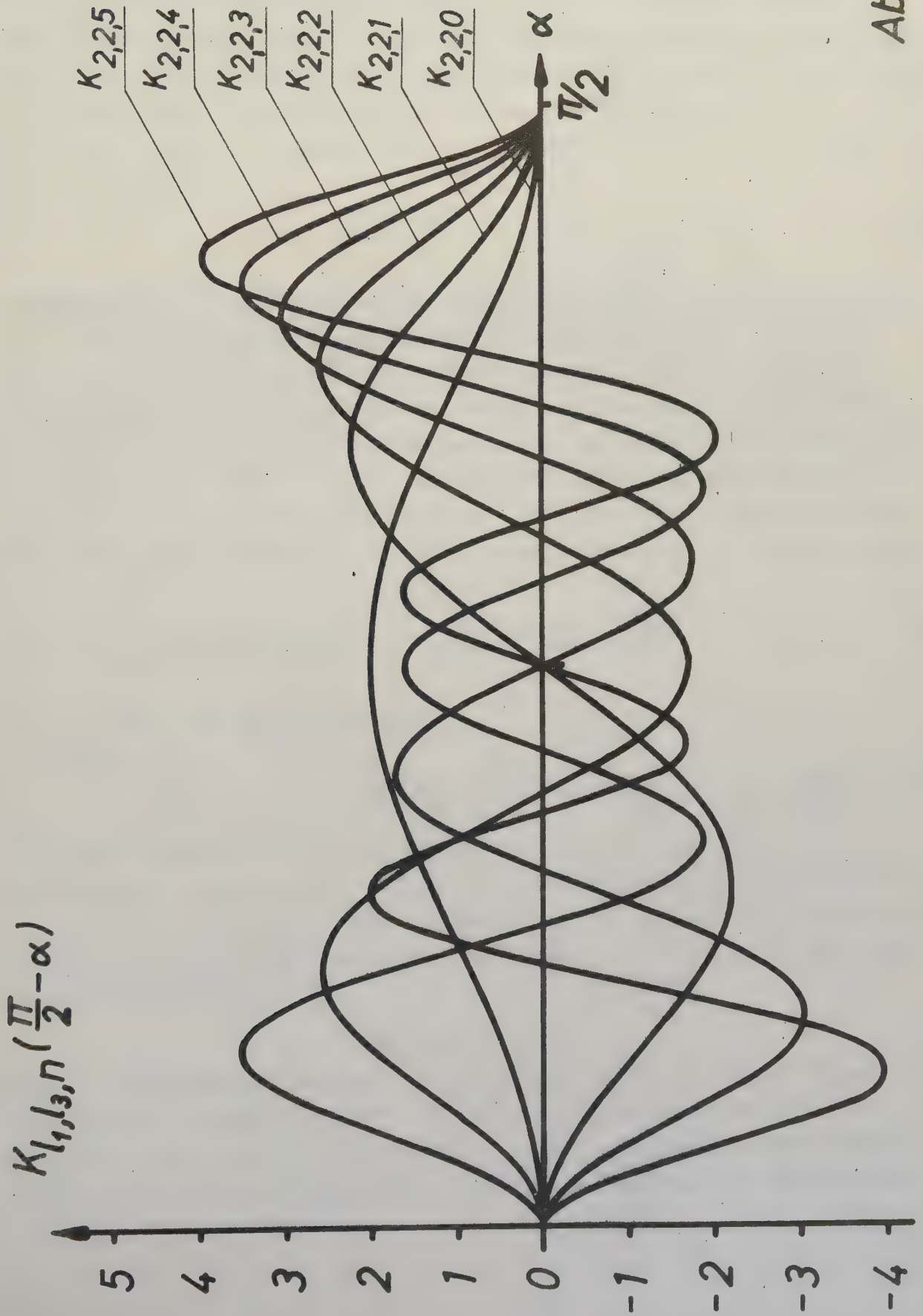


Abb. 8c



II Phasenanalyse der Reaktionsprodukte

Das einfachste Verfahren zur Behandlung von Streuproblemen ist die Born-Approximation, welche die Wirkung des streuenden Potentials als kleine Störung der Wellenfunktion auffaßt. Diese Näherung wird bestimmt vernünftig sein, falls die Verweilzeit R/v des Teilchens (oder Clusters) klein ist gegen die Zeit $\hbar/V$, in der die Energie unscharf ist

$$\frac{R}{v} \ll \frac{\hbar}{V} \quad (44)$$

Hierbei ist R die Reichweite des Potentials der Stärke V und v die Teilchengeschwindigkeit. Mit anderen Worten, ihre Anwendung ist nur sinnvoll im Bereich großer Teilchen-Energien. Für kleine Teilchenenergien ist es vorteilhafter, die Teilchen mit verschiedenen Drehimpulsen getrennt zu behandeln, weil man in den meisten Fällen durch Berücksichtigung der niedrigsten Drehimpulse eine gute Näherung erzielt. Die ebene Dreiteilchen-Welle mit dem Impuls $\hbar k$ im Dreiteilchen-Kanal r verhält sich wie

$$\exp \{ i (k_1 r_1 + k_2 r_2) \} \sim \frac{J_{l_1+l_3+2n+2}(kr)}{(kr)^2} \quad (45)$$

und in der Nähe des Ursprungs

$$\xrightarrow{(kr) \rightarrow 0} \frac{(kr)^{l_1+l_3+2n}}{2^{l_1+l_3+2n+2} [l_1+l_3+2n+2]!} \quad (46)$$

Hieraus folgern wir, daß sich die Lage des 1. Maximums mit wachsenden Drehimpulsen l_1, l_3 und der Korrelationsquantenzahl n zu größeren Werten von kr verschiebt. Für das übliche Schalenmodell-Potential mit endlicher Reichweite R , liefern dann nur Partialwellen bis etwa

$$l_1+l_3+2n \approx kR$$

einen wesentlichen Beitrag zur Phasenanalyse. Für eine Streuenergie bis beispielsweise 15 MeV und eine Reichweite von $R = 5 \text{ fm}$, sind nur Beiträge bis $l_1, l_3 = 2$ dominant. Aus diesem Grund erscheint es vernünftig, eine Phasenanalyse der Reaktionsprodukte durchzuführen.

In diesem Kapitel behandeln wir die elastischen und inelastischen Dreiteilchen-Kanäle. Dazu ist es erforderlich, die Definition der S-Matrix allgemeiner aufzufassen und eine vernünftige Parametrisierung vorzunehmen. Für die Parametrisierung ist zu fordern, daß

- (1) die Unitarität der S-Matrix nicht *verletzt* wird
 - (2) die Parameter nicht explizit energieabhängig werden und
 - (3) künstliche Annahmen, wie die Einführung von Wechselwirkungs-Radien etc., vermieden werden.
- Für das Zweiteilchen-Kontinuum wird eine Schalenmodell-Beschreibung vorgeschlagen und die Mehrkanal-R-Matrix für Dreiteilchen-Reaktionen abgeleitet. Letztlich werden im Abschnitt 2.4 andere Approximations-Möglichkeiten für eine Parametrisierung der S-Matrix erörtert und ihre Brauchbarkeit diskutiert.

2. 1 Wirkungsquerschnitt

Aus der gewöhnlichen Streutheorie ist bekannt, daß die asymptotische Form der Streufunktion als Überlagerung ein- und auslaufender Kugelwellen dargestellt werden kann

$$\Psi = \sum_c \{A_c I_c + B_c O_c\} \varphi_c + \sum_r \{A_r I_r + B_r O_r\} \varphi_r . \quad (48)$$

c charakterisiert einen physikalischen Zweiteilchen- und r einen physikalischen Dreiteilchen-Kanal. Die Anteile I und O enthalten nur den Radialanteil, die Kanalwellenfunktion φ enthält die Winkel- und Spin-Wellenfunktion, sowie die Targetwellenfunktion.

φ_r enthält außerdem noch eine Oberflächenfunktion (ihre genaue Spezifikation erfolgt später). Es ist klar, daß die Amplituden der ein- und auslaufenden Wellen nicht unabhängig voneinander sein können, sondern durch die unitäre S-Matrix verknüpft sind. Betrachten wir einen Prozess mit dem Eingangskanal c , so kann dieser mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, die proportional dem Quadrat des entsprechenden S-Matrix-Elementes ist, in einem Zweiteilchen-Kanal c' oder Dreiteilchen-Kanal r' verlaufen. Für einen Eingangskanal c folgt

$$\Psi_c = I_c \varphi_c - \sum_{c'} S_{c'c} O_{c'} \varphi_{c'} - \sum_{r'} S_{r'c} O_{r'} \varphi_{r'} . \quad (49)$$

Entsprechendes gilt für einen Dreiteilchen-Kanal r

$$\Psi_r = I_r \varphi_r - \sum_{r'} S_{r'r} O_{r'} \varphi_{r'} - \sum_{c'} S_{c'r} O_{c'} \varphi_{c'} . \quad (50)$$

Durch Superposition aller Partialwellen, mit gewissen Amplituden A , erhalten wir die allgemeinste Streufunktion

$$\Psi = \sum_c A_c \Psi_c + \sum_r A_r \Psi_r . \quad (51)$$

Setzen wir Gl.(49),(50) in (51) ein und fassen die zum gleichen Kanal

gehörigen Anteile zusammen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_c \{ A_c I_c - \sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} O_c \} \varphi_c + \sum_r \{ A_r I_r - \sum_{r'} S_{rr'} A_{r'} O_r \} \varphi_r \\ & - \sum_{cr'} S_{r'c} A_c O_{r'} \varphi_{r'} - \sum_{rc'} S_{c'r} A_r O_{c'} \varphi_{c'} \end{aligned} \quad (52)$$

Ersetzen wir in den beiden letzten Termen $\{c \rightarrow c', r' \rightarrow r\}$ und $\{c' \rightarrow c, r \rightarrow r'\}$, dann nimmt die Gesamtwellenfunktion Ψ die einfache Gestalt an

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_c (A_c I_c - \sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} O_c - \sum_{r'} S_{cr'} A_{r'} O_c) \varphi_c + \\ & \sum_r (A_r I_r - \sum_{r'} S_{rr'} A_{r'} O_r - \sum_{c'} S_{rc'} A_{c'} O_r) \varphi_r \end{aligned} \quad (53)$$

Ein Vergleich der Ausdrücke Gl. (48) mit Gl. (53), liefert die gesuchte Verknüpfung zwischen den Amplituden der aus- und einlaufenden Wellen

$$\begin{aligned} B_c = & - \sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} - \sum_{r'} S_{cr'} A_{r'} \quad , \\ B_r = & - \sum_{r'} S_{rr'} A_{r'} - \sum_{c'} S_{rc'} A_{c'} \end{aligned} \quad (54)$$

Die ausgedehnte S-Matrix hat dann die folgende Form:

	c'	$r'=1$	$r'=2$
c	$S_{cc'}$	$S_{c1'}$	$S_{c2'}$
$r=1$	$S_{1c'}$	$S_{11'}$	$S_{12'}$
$r=2$	$S_{2c'}$	$S_{21'}$	$S_{22'}$

Abb. 9

Aus der Hermitizität des Hamiltonoperators und der daraus folgenden zeitlichen Konstanz der Aufenthaltswahrscheinlichkeit, ergibt sich für einen Ausgangskanal $\mathcal{Y}'$ einen Beitrag

$$|S_{\mathcal{Y}\mathcal{Y}'}|^2$$

zur Gesamtwahrscheinlichkeit. Allgemein gilt für die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit

$$\sum_{c'} |S_{cc'}|^2 + \sum_{c'} |S_{rc'}|^2 + \sum_{r'} |S_{cr'}|^2 + \sum_{r'} |S_{rr'}|^2 = 1 \quad (55)$$

Vor der Reaktion sind die Wellenfunktionen Ψ_c und Ψ_r orthogonal zueinander $\langle \Psi_c | \Psi_r \rangle = 0$. Nach der Reaktion haben wir in allen Ausgängen auslaufende Wellen. Für einen herausgegriffenen Kanal γ (Zweiteilchen- oder Dreiteilchen-Kanal) erhalten wir

$$\sum_{\gamma} S_{x\gamma}^* S_{r\gamma} = 0 \quad \text{mit } x \neq r$$

und $x = \{c, r\}$ sowie $r = \{c, r\}$. Die Zusammenfassung liefert in Matrixform

$$S S^+ = 1.$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für einen Dreikörper-Aufbruch ist proportional dem entsprechenden Quadrat des S-Matrixelementes und der Korrelationsfunktion

$$\frac{d\sigma_{r \rightarrow r'}}{d\Omega_{hyp}} \sim \left| \tilde{K}_{l_1 l_3 n} \left(2 \arctg \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right) \right|^2 |1 - S_{rr'}|^2 \quad (56)$$

Die genaue Spezifikation einer Reaktion zur Streuenergie E und Gesamtimpuls J^π erfolgt im nächsten Abschnitt.

2. 11 Elastische Streuung für zwei Teilchen ohne Spin und Ladung

Die einfachste Dreikörperstreuung (Abb. 1a, Seite 1) ist die elastische Streuung zweier Teilchen, ohne Spin und ohne Ladung, an einem Zentralpotential. Für die Ableitung der R-Funktion starten wir von der radialen Dreiteilchen-Schrödinger-Gleichung (26a), die wir mit $R(r) = r^{-\frac{1}{2}} \varphi(r)$ umformen.

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{(l_1 + l_3 + 2n + 2)^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_{12} \right] \varphi = 0 \quad (57)$$

Das gesamte Potential, einschließlich des Zentrifugalterms, werden wir durch $\mathcal{U}$ abkürzen. Damit erhalten wir für ein bestimmtes Wertetripel $\{l_1, l_3, n\}$ für zwei verschiedene Energien E_1 und E_2 die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + (k_1^2 - \mathcal{U}) \varphi_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} + (k_2^2 - \mathcal{U}) \varphi_2 = 0. \quad (58)$$

Multiplizieren wir die erste mit $\varphi_2(r)$ und die zweite Gleichung mit $\varphi_1(r)$ und addieren beide, dann erhalten wir mit dem Greens-Theorem

$$\left(\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dr} - \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dr} \right)_{r=c} = \frac{2m}{\hbar^2} (E_2 - E_1) \int_0^c \varphi_1 \varphi_2 dr. \quad (59)$$

$\varphi_1(r)$ und $\varphi_2(r)$ sind orthonormierte Zweiteilchenfunktionen innerhalb des Viertelkreises $0 \leq r \leq c$ (siehe Abb. 5). Durch Vorgabe einer Randbedingung b am Dreiteilchen-Kanalradius $r=c$ erhalten wir Innenraumfunktionen $\varphi_\lambda(r)$ zur Energie E_λ , nach denen die Streufunktion entwickelt wird.

$$\varphi_E(r) = \sum_\lambda a_\lambda \varphi_\lambda(r) \quad \text{mit} \quad a_\lambda = \int_0^c \varphi_E(r) \cdot \varphi_\lambda(r) dr. \quad (60)$$

Identifizieren wir φ_1 mit φ_λ und φ_2 mit φ_E , dann erhalten wir für den Koeffizienten

$$a_\lambda = \frac{\hbar^2 \varphi_\lambda(c)}{2m(E_\lambda - E)} \left\{ \left(\frac{d\varphi_E(r)}{dr} \right)_{r=c} - \frac{b}{c} \varphi_E(c) \right\}, \quad (61)$$

und die Streulösung

$$\varphi_E(r) = \sum_{\lambda} \frac{\hbar^2}{2mc} \cdot \frac{\varphi_{\lambda}(c) \cdot \varphi_{\lambda}(r)}{E_{\lambda} - E} \left\{ c \left(\frac{d\varphi_E(r)}{dr} \right)_{r=c} - b \varphi_E(c) \right\} \quad (62)$$

Natürlich ist auch $(d\varphi_{\lambda}(r)/dr)_{r=c} = 0$ für diskrete Energien möglich. Für diesen Fall erhalten wir

$$\varphi_E(r) = G(r, c) \cdot \left\{ r \frac{d\varphi_E(r)}{dr} \right\}_{r=c}$$

mit

$$G(r, c) = \frac{\hbar^2}{2mc} \sum_{\lambda} \frac{\varphi_{\lambda}(c) \cdot \varphi_{\lambda}(r)}{E_{\lambda} - E} \quad (63)$$

Die Greensfunktion $G(r, c)$ verbindet den Wert der Wellenfunktion im Innenbereich mit der Ableitung der Außenraumfunktion am Matching-Radius. Für die R-Funktion folgt

$$R = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - E} \quad \text{mit} \quad \gamma_{\lambda} = \left(\frac{\hbar^2}{2mc} \right)^{\frac{1}{2}} \varphi_{\lambda}(c) \quad (64)$$

Mit den ein- und auslaufenden Wellen Gl. (31), erhalten wir für die Streufunktion die übliche Darstellung

$$U_{l_1, l_3, n} = \frac{I_{l_1, l_3, n}}{O_{l_1, l_3, n}} \cdot \frac{1 - L_{l_1, l_3, n}^* \cdot R_{l_1, l_3, n}}{1 - L_{l_1, l_3, n} \cdot R_{l_1, l_3, n}} \quad (65)$$

Im Spezialfall für konstante Potentiale $\mathcal{U}$, erhalten wir für den Innenbereich $0 \leq r \leq \text{Kernradius}$ analytische Lösungen

$$\varphi_E(r) = r^{\frac{1}{2}} \cdot J_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(kr) \quad \text{mit} \quad k = \left(\frac{2m[E - \mathcal{U}]}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (66)$$

bzw. für negative kin. Energie mit $\bar{k} = ik$

$$\varphi_E(r) = r^{\frac{1}{2}} \cdot I_{l_1 + l_3 + 2n + 2}(\bar{k}r) \quad (67)$$

Die Herleitung des Wirkungsquerschnittes in Termen der Streufunktion, für die Streuung von zwei spinlosen ungeladenen

Teilchen, erfolgt analog der elastischen Streuung für ein Teilchen.

In großem Abstand vom Streuzentrum ist die *ebene* Welle für ein neutrales Teilchenpaar $\exp\{i(k_1 r_1 + k_2 r_2)\}$ die Lösung der kräftefreien Schrödinger-Gleichung. Diese Zweiteilchenwelle für die Relativbewegung ist in eine Potenzreihe nach den Eigenfunktionen des Dreikörper-Problems mit bestimmten Werten des Drehimpulses l_1 und l_3 zu entwickeln. Dazu betrachten wir zuerst einmal nur ein freies Teilchen, das sich entlang der z_1 -Achse mit einem bestimmten Impuls $\hbar k$ bewegt. Die Wellenfunktion lautet

$$\Psi = \text{const} \cdot \exp\{ik_1 z_1\}$$

Entwickeln wir nun diese um die z_1 -Richtung axialsymmetrische Funktion nach Eigenfunktionen mit bestimmtem Drehimpuls l_1 , so erhalten wir die wohlbekannte, von φ unabhängige, Entwicklung für die erste Welle

$$\exp\{i(k_1 r_1 \cos \vartheta_1)\} = \sum_{l_1=0}^{\infty} i^{l_1} (2l_1+1) P_{l_1}(\cos \vartheta_1) \left(\frac{\pi}{2k_1 r_1}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l_1+\frac{1}{2}}(k_1 r_1). \quad (68)$$

Für die zweite Welle, mit einer azimutalen Drehung um φ_2 , folgt

$$\exp\{i(k_2 r_2 \cos u)\} = \sum_{l_3=0}^{\infty} i^{l_3} (2l_3+1) P_{l_3}^{m_3}(\cos u) \left(\frac{\pi}{2k_2 r_2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l_3+\frac{1}{2}}(k_2 r_2). \quad (69)$$

Hierbei ist u der Winkel zwischen k_2 (dem relativen Impuls gemäß Abb. 3) und r_2 (die Relativkoordinate gemäß Abb. 2), für dessen Kosinus gilt

$$\cos u = \cos \Theta \cos \vartheta_2 + \sin \Theta \sin \vartheta_2 \cos(\phi - \varphi_2). \quad (70)$$

Benutzen wir für diesen Zwischenwinkel das Additionstheorem der Legendre-Funktionen, so erhalten wir für die *ebene* Welle im Dreiteilchen-Kanal

$$\exp\{ikr(\cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta_1 + \sin \alpha \sin \beta [\cos \Theta \cos \vartheta_2 + \sin \Theta \sin \vartheta_2 \cos(\phi - \varphi_2)])\} =$$

$$\frac{\pi}{2(k_1 k_2 r_1 r_2)^{1/2}} \sum i^{l_1+l_3} (2l_1+1)(2l_3+1) P_{l_1}(\cos \vartheta_1) \frac{(l_3-m_3)!}{(l_3+m_3)!} e^{im_3(\phi-\varphi_2)}.$$

$$P_{l_1}^{m_3}(\cos \Theta) P_{l_3}^{m_3}(\cos \vartheta_2) J_{l_1+\frac{1}{2}}(k_1 r_1) J_{l_3+\frac{1}{2}}(k_2 r_2). \quad (71)$$

Mit Gleichung (33) erhalten wir sodann die gesuchte Darstellung für die Zweiteilchenwelle

$$\exp\{ikr(\cos\alpha\cos\beta\cos\vartheta_1 + \sin\alpha\sin\beta[\cos\theta\cos\vartheta_2 + \sin\theta\sin\vartheta_2\cos\varphi_2])\} = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{(kr)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\sum_{l_1, l_3, n} (-1)^n i^{l_1+l_3} (2l_1+1)^{\frac{1}{2}} (2l_3+1)^{\frac{1}{2}} K_{l_1 l_3 n}(\alpha) \cdot K_{l_1 l_3 n}(\beta) \cdot \sum_{m_3=0}^{l_3} Y_{l_3 0}(\vartheta_1).$$

$$Y_{l_3 - m_3}(\theta, \phi) \cdot Y_{l_3 m_3}(\vartheta_2, \varphi_2) \cdot \{I_L - O_L\}, \quad (72)$$

mit

$$I_L = O_L^* = \exp\{-i(kr - \frac{\pi}{2}(l_1 + l_3 + 2n + \frac{3}{2}))\}.$$

ϑ_1 und φ_1 legen die Richtung des Radiusvektors vom Target nach μ_1 fest, wobei wir ohne Verletzung der Allgemeinheit $\varphi_1 = 0$ setzen können. Entsprechend wird der Radiusvektor vom Target nach μ_2 durch die Winkel ϑ_2 und φ_2 festgelegt. k_1 ist der relative Impuls der zwei reduzierten Massen μ_1 und μ_2 . Das Koordinatensystem ist dabei so gelegt, daß k_1 parallel zur z -Richtung zu liegen kommt. k_2 ist der Impuls, mit dem sich der Schwerpunkt, gebildet aus μ_1 und μ_2 , relativ zur Targetmasse bewegt. Die Winkel θ und ϕ legen seine Richtung fest. Eine Alternativ-Ableitung folgt aus der Lösung der sechsdimensionalen inhomogenen Helmholtz-Gleichung mit der Greenschen Funktion [9]. Die einfallende ebene Welle Gl. (72) verursacht am Target eine Streuwelle, die ebenfalls als Überlagerung von Wellen mit verschiedenen $\{l_1, l_3, n\}$ dargestellt werden kann. Wird für das Potential Kugelsymmetrie angenommen, dann kann es keine Übergänge in $\{l_1, l_3, n\}$ verursachen. Wegen der Entartung von $\{l_1, l_3, n\}$ bei $l_1 = l_3$ gibt es einen Drehimpulsaustausch. Für die gesamte Wellenfunktion folgt damit

$$\Psi = \Psi_{inc} + \Psi_{scatt} \quad (73)$$

Das asymptotische Verhalten ist durch die folgende Form gegeben

$$\psi \propto v^{-\frac{1}{2}} \left\{ \exp(ikr [\cos\alpha \cos\beta \cos\theta + \sin\alpha \sin\beta (\cos\theta \cos\vartheta_2 + \sin\theta \sin\vartheta_2 \cos\varphi_2)]) + Q(\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_2) \cdot \exp\{ikr\} (kr)^{-\frac{5}{2}} \right\}. \quad (74)$$

Der Faktor $v^{-\frac{1}{2}} = (\vartheta_1 + \vartheta_2)^{-\frac{1}{2}}$ wurde eingeführt um die Stromnormierung für den Paarfluß zu garantieren [35]. $e^{ikr}/r^{5/2}$ ist eine durch das Streuzentrum hervorgerufene sphärische Welle mit der Amplitude $Q(\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_2)$. Aus der Dgl. (26a) für die potentialfreie Bewegung, folgt formal die asymptotische Lösung

$$\psi \propto \frac{A_L}{v^{\frac{1}{2}} (kr)^{\frac{5}{2}}} \{ I_L - S_L O_L \}. \quad (75)$$

Die Amplitude Q bestimmen wir aus Gl. (73) und (75) so, daß in ψ_{scatt} keine einlaufenden Anteile vorkommen. Mit anderen Worten, die Streuwelle ergibt sich aus einer Superposition von ein- und auslaufenden Wellen, so daß sie nur auslaufende Anteile hat. Für die Streuamplitude finden wir

$$Q(\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_2) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{l_1, l_3, n} (-1)^n (2l_1+1)^{\frac{1}{2}} (2l_3+1)^{\frac{1}{2}} K_{l_1 l_3 n}(\alpha) \cdot K_{l_1 l_3 n}(\beta) \cdot Y_{l_1 0}(\vartheta_1) \cdot \sum_{m_3=0}^{l_3} Y_{l_3 -m_3}(\theta, \phi) \cdot Y_{l_3 m_3}(\vartheta_2, \varphi_2) \{ 1 - S_L \}. \quad (76)$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt in das Raumwinkel-element $d\Omega_{\text{hyp}}$ finden wir analog [36]

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_1 d\Omega_2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha d\alpha} = \lambda^2 |Q(\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_2)|^2. \quad (77)$$

Durch Integration über den Winkel α eliminieren wir die Korrelationsabhängigkeit der Einteilchenkoordinaten. Eine weitere Integration über die Raumwinkel liefert dann

$$\sigma = \pi^2 \lambda^2 \sum_{l_1, l_3, n} \frac{l_1 + l_3 + 2n + 2}{\sin 2\beta} (2l_1+1)(2l_3+1)^2 |\tilde{K}_{l_1 l_3 n}(\beta)|^2 |1 - S_L|^2. \quad (78)$$

Einen besonders einfachen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt erhalten wir für $n=0$

$$\sigma = \sqrt{2} \pi^2 \chi^2 \sum_{l_1, l_3} \frac{\Gamma(l_1 + l_3 + 3)}{\Gamma(l_1 + \frac{3}{2}) \cdot \Gamma(l_3 + \frac{3}{2})} (2l_1 + 1)(2l_3 + 1)^2 \cos^{2l_1} \beta \sin^{2l_3} \beta |1 - S_L|^2 \quad (79)$$

mit $\beta = \arctg(\epsilon_2/\epsilon_1)^{\frac{1}{2}}$. ϵ_1 und ϵ_2 sind die kin. Energien der beiden auslaufenden Nukleonen relativ zum verbleibenden Restkern.

2.12 Inelastischer Wirkungsquerschnitt

In Anlehnung an die hervorgegangene Ableitung, wird jetzt der Wirkungsquerschnitt für einen inelastischen Prozess bestimmt. Zur Charakterisierung dieser Situation ist ein Satz von Quantenzahlen notwendig $\{v, \Sigma, \mu_\Sigma\}$. v spezifiziert den Zweiteilchen-Kanal mit den intrinsischen Projektil- und Target-Quantenzahlen, Σ ist der Kanalspin und μ_Σ seine Projektion. Die allgemeine Wellenfunktion für einen Kanal v mit dem Kanalspin Σ ist im asymptotischen Bereich durch eine Superposition von ein- und auslaufenden Kugelwellen darstellbar

$$\psi_{r\Sigma}^{JM} = \left\{ A_{r\Sigma L}^{JM} e^{-i(k_r r - \frac{\pi}{2}L)} + B_{r\Sigma L}^{JM} e^{i(k_r r - \frac{\pi}{2}L)} \right\} (k_r r)^{-\frac{5}{2}} v_r^{-\frac{1}{2}} \tilde{y}_{JL\Sigma}^M \phi_{r\Sigma}. \quad (80)$$

Hierbei berücksichtigt $\phi_{r\Sigma}$ im wesentlichen den Ladungszustand des (A-2)-Teilchensystems und der beiden Teilchen. Die Funktion $\tilde{y}_{JL\Sigma}^M$ hat folgende Gestalt

$$\tilde{y}_{JL\Sigma}^M = \sum_{\mu_\Sigma} (L \Sigma J | M - \mu_\Sigma \mu_\Sigma M) y_{L, M - \mu_\Sigma} \psi_{J_h s}^{\Sigma \mu_\Sigma} \tilde{K}_{l_1 l_3 n}(\alpha) \tilde{K}_{l_1 l_3 n}(\beta). \quad (81)$$

Die Kanalspinfunktion $\psi_{J_h s}^{\Sigma \mu_\Sigma}$ ist durch folgendes Kopplungs-Schema definiert

$$\psi_{J_h s}^{\Sigma \mu_\Sigma} = [J_h \otimes [S_1 \otimes S_3]_m]_{\mu_\Sigma}^{\Sigma}.$$

y_{L, m_L} ist die Funktion zum Gesamt-Drehimpuls L der beiden Teilchen und ist erklärt durch

$$y_{L, m_L} = [l_1 \otimes l_3]_{m_L}^L$$

J_h charakterisiert den Targetspin und s ist der Gesamt-Spin des Projektils. Zur Vereinfachung haben wir die Abkürzung $L = l_1 + l_3 + 2n + \frac{3}{2}$ eingeführt.

Mit dieser Spinabhängigkeit für die einfallende Welle im Kanal v , folgt für den asymptotischen Bereich

$$\exp(i k_r r \{ \cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta_1 + \sin \alpha \sin \beta [\cos \theta \cos \vartheta_2 + \sin \theta \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2] \}).$$

$$\psi_{J_h s}^{\Sigma \mu_\Sigma} \phi_{r\Sigma} = i \pi^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{k_r r} \right)^{\frac{5}{2}} \sum_{l_1, l_3, n} (-1)^n i^{l_1 + l_3} \frac{1}{2} (2l_1 + 1)^{\frac{1}{2}} (2l_3 + 1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m_3=0}^{l_3} Y_{l_3, -m_3}(\theta, \phi).$$

$$\sum_{\substack{L=l_1+l_3 \\ L=|l_1-l_3|}}^{l_1+l_3} \sum_{m_L=-L}^L \sum_{J=|L-\Sigma|}^{L+\Sigma} \sum_{M=-J}^J (0 m_3 m_L | l_1 l_3 L) (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) \{I_L - O_L\} \tilde{y}_{JL\Sigma}^M \phi_{r\Sigma}.$$

Die Reaktionswelle $\Psi_{\text{reac}} = \Psi - \Psi_{\text{inc}}$ läßt sich aus den Gleichungen (80), (82) berechnen. Über die physikalische Forderung, daß die Reaktionswelle keine einlaufenden Wellen hat, bestimmen wir zunächst die unbekannten Koeffizienten $A_{r\Sigma L}^{JM}$:

$$A_{r\Sigma L}^{JM} = i(2\pi)^{\frac{3}{2}} k_r^{-\frac{5}{2}} v_r^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l_1, l_3, n, \\ m_3, L, m_L, J, M}} (-)^n i^{l_1+l_3} (2l_1+1)^{\frac{3}{2}} (2l_3+1)^{\frac{1}{2}} (0m_3 m_L | l_1 l_3 L) \cdot \\ (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) Y_{l_3, -m_3}(\theta, \phi). \quad (83)$$

Durch Einführung der S-Matrix liegen damit auch die Koeffizienten $B_{r\Sigma L}^{JM}$ fest

$$B_{r\Sigma L}^{JM} = - \sum_{r'\Sigma'L'} S_{r'\Sigma'L', r\Sigma L}^{JM} A_{r\Sigma L}^{JM}. \quad (84)$$

Für die Reaktionswelle ergibt sich dann die Gestalt:

$$\Psi_{\text{reac}} = i(2\pi)^{\frac{3}{2}} k_r^{-\frac{5}{2}} \sum_{\substack{l_1, l_3, n, \\ L, m_L, J, M, m_3}} (-)^n i^{l_1+l_3} (2l_1+1)^{\frac{3}{2}} (2l_3+1)^{\frac{1}{2}} (0m_3 m_L | l_1 l_3 L) (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) Y_{l_3, -m_3} \cdot \\ \left(\frac{v_r}{v_{r'}}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m_L', \mu_\Sigma', m_{l_1}', m_{l_3}', \\ r', \Sigma', L'}} (L' \Sigma' J | m_L' \mu_\Sigma' M) (l_1' l_3' L' | m_{l_1}' m_{l_3}' m_{L'}) \tilde{K}_{l_1' l_3' n'}(\alpha) \cdot \\ \tilde{K}_{l_1' l_3' n'}(\beta) r_r^{-\frac{5}{2}} \exp\left\{i(k_r r_r - \frac{\pi}{2}(l_1' + l_3' + 2n' + \frac{3}{2}))\right\} Y_{l_1' m_{l_1}'} Y_{l_3' m_{l_3}'} \cdot \\ \left\{ \delta_{r'r} \delta_{\Sigma'\Sigma} \delta_{L'L} - S_{r'\Sigma'L', r\Sigma L} \right\} \Psi_{J_h' \Sigma_h' L_h'}^{\Sigma' \mu_\Sigma'} \cdot \phi_{r'\Sigma'}. \quad (85)$$

Andererseits können wir aus physikalischen Überlegungen die Streuwelle wie folgt ansetzen

$$\Psi_{\text{reac}} = i k_r^{-\frac{5}{2}} \sum_{\mu_{\Sigma'}} \left(\frac{v_r}{v_{r'}} \right)^{\frac{1}{2}} r_{r'}^{-\frac{5}{2}} \exp \{ i k_{r'} r_{r'} \} Q_{r'\Sigma'\mu_{\Sigma'}, r\Sigma\mu_{\Sigma}} \Psi_{J_h' S_{13}}^{\Sigma'\mu_{\Sigma'}} \phi_{v'\Sigma'} \quad (86)$$

Durch Vergleich von Gl. (85) mit (86), folgt für die Streuamplitude

$$Q_{r'\Sigma'\mu_{\Sigma'}, r\Sigma\mu_{\Sigma}} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{l_1, l_3, n_1 \\ L, m_L, J, M, m_J, L', m_{L'}, m_{J'}}} (-)^{n_1} i^{l_1+l_3-(l_1'+l_3')} (2l_1+1)^{\frac{3}{2}} (2l_3+1)^{\frac{1}{2}} \tilde{K}_{l_1 l_3 n_1}(\alpha) \tilde{K}_{l_1' l_3' n_1'}(\beta) \cdot \\ (0 m_3 m_L | l_1 l_3 L) (m_L \mu_{\Sigma} M | L \Sigma J) (L' \Sigma' J | m_{L'} \mu_{\Sigma'} M) \cdot \\ (l_1' l_3' L' | m_{l_1'} m_{l_3'} m_{L'}) \{ \delta_{r'r'} \delta_{\Sigma'\Sigma} \delta_{L'L} - S_{r'\Sigma'\mu_{\Sigma'}, r\Sigma\mu_{\Sigma}} \} Y_{l_1' m_{l_1'}} Y_{l_3' m_{l_3'}} \quad (87)$$

Alle ungestrichenen Größen beziehen sich auf den Eingangskanal, die gestrichenen auf den Ausgangskanal. Die funktionale Abhängigkeit der Reaktionsamplitude $Q_{r', \dots, r}$ von der Korrelationsfunktion $K_{l_1' l_3' n_1'}(\beta)$ stellt eine explizite Energiekorrelation zwischen den beiden Teilchen im Ausgangskanal her. Der differentielle Wirkungsquerschnitt, für einen Prozeß mit zwei auslaufenden Teilchen, ist das Verhältnis des Streustromes in das Raumwinkel-element $d\Omega_{\text{hyp}}$ zum einfallenden Gesamtstrom

$$d\sigma_{r'\Sigma'\mu_{\Sigma'}, r\Sigma\mu_{\Sigma}} = k^2 |Q_{r'\Sigma'\mu_{\Sigma'}, r\Sigma\mu_{\Sigma}}|^2 d\Omega_{\text{hyp}} \quad (88)$$

Das Raumwinkelement ist festgelegt durch

$$d\Omega_{\text{hyp}} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (89)$$

Charakteristisch für den WQ ist, außer der Winkelverteilung der beiden auslaufenden Nukleonen, die Energiekorrelation der beiden Teilchen. Tragen ein oder beide Ejektile eine Ladung, dann sind die entsprechenden Coulombwellen aus Abschnitt 1.2.2 zu benutzen.

Da jeder Wert Σ des Kanalspins sich auf $(2\Sigma+1)$ Arten im Raum orientieren kann, folgt für den partiellen WQ für eine Reaktion $\nu\Sigma \rightarrow \nu'\Sigma'$

$$\frac{d^3\sigma_{\nu'\Sigma', \nu\Sigma}}{(d\Omega_1 d\Omega_2 d\alpha)_{\nu'\Sigma'}} = \sin^2\alpha \cos^2\alpha \frac{\lambda^2}{2\Sigma+1} \sum_{\mu_\Sigma \mu_{\Sigma'}} |Q_{\nu', \dots, \mu_\Sigma}|^2. \quad (90)$$

Mit der asymptotischen Bedingung für die Korrelationswinkel

$\tan\alpha = \tan\beta$ erhalten wir für den Anteil des Raumwinkelementes, das von α abhängt

$$\sin^2\alpha \cos^2\alpha d\alpha = \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon_2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^3}.$$

Damit folgt für eine Energie-Diskriminierung nach der Energie des 2. Teilchens

$$\frac{d^3\sigma_{\nu'\Sigma', \nu\Sigma}}{d\Omega_1 d\Omega_2 d\varepsilon_2} = \tilde{T}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \frac{\lambda^2}{2\Sigma+1} \sum_{\mu_\Sigma \mu_{\Sigma'}} |Q_{\nu', \dots, \mu_\Sigma}|^2,$$

mit

$$\tilde{T}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^3}.$$

ε_1 und ε_2 sind die Relativenergien für die doppelte Nukleonenemission im Ausgangskanal. Andererseits kann die Energie im Ausgangskanal durch die Anregungsenergie E_d und den Q -Wert ausgedrückt werden.

$$E_{rel0} = E_d - Q.$$

Damit ist es nun möglich, ε_2 zu eliminieren. Für den kinematischen Vorfaktor erhalten wir (siehe Abb. 10)

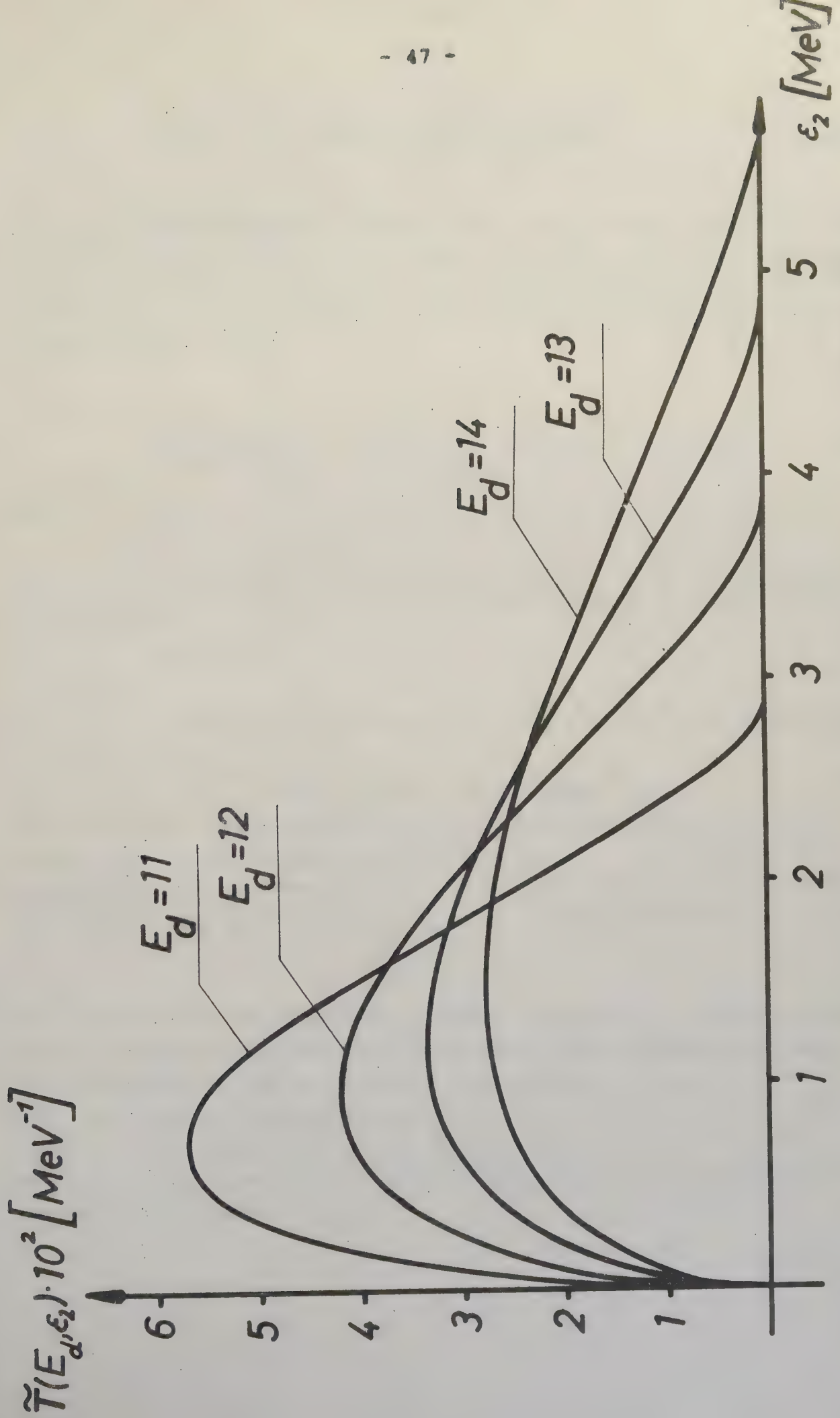


Abb. 10

$$\tilde{T}(E_d, \varepsilon_2) = \frac{(E_d - Q - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \{E_d - Q - \varepsilon_2\})^{\frac{1}{2}}}{2(E_d - Q)^3} \quad (91)$$

Ist eine Diskriminierung nach ε_2 nicht möglich, dann wird über diesen Freiheitsgrad integriert. Wir gehen zu Gl. (90) zurück und integrieren diese Gleichung über $d\alpha$. Mit der Orthogonalitätsrelation für die Funktionen $K_{l_1 l_3 n}(\alpha)$, erhalten wir den differentiellen WQ pro Raumwinkелеlement $d\Omega_1$

$$\frac{d^2 \sigma_{r'\Sigma', r\Sigma}}{(d\Omega_1 d\Omega_2)_{r'\Sigma'}} = \frac{\lambda_r^2}{2\Sigma+1} \sum_{\mu_\Sigma \mu_\Sigma'} |T_{r'\Sigma' \mu_\Sigma', r\Sigma \mu_\Sigma}|^2 \quad (92)$$

mit

$$T_{r'\Sigma' \mu_\Sigma', r\Sigma \mu_\Sigma} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{l_1, l_3, n', \\ L, m_L, J, M, m_3, L', m_{L'}, m_{L'}}} (-1)^{n'} i^{l_1+l_3-(l_1'+l_3')} (2L_1+1)^{\frac{1}{2}} (2L_3+1)^{\frac{1}{2}} \tilde{K}_{l_1' l_3' n'}(\arctg \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}) \cdot \\ (0 m_3 m_L | l_1 l_3 L) (m_L \mu_\Sigma M | L \Sigma J) (L' \Sigma' J | m_{L'} \mu_\Sigma' M) (l_1 l_3 L | m_{l_1'} m_{l_3'} m_L) \cdot \\ \{ \delta_{r'r'} \delta_{\Sigma'\Sigma} \delta_{L'L} - \delta_{r'\Sigma' L'} \delta_{r\Sigma L} \} Y_{l_1' m_{l_1'}} Y_{l_3' m_{l_3'}} \quad (93)$$

Gleichung (93) zeigt explizit, daß die Streuamplitude $T_{r'\Sigma' \mu_\Sigma', r\Sigma \mu_\Sigma}$ direkt proportional der Korrelationsfunktion $K_{l_1' l_3' n'}$ ist. Hierbei sind ε_1 und ε_2 die Relativenergien der auslaufenden Nukleonen, ihre Summe ist gleich der Relativenergie $E_{rel 0}$ im Dreiteilchen-Kanal

$$E_{rel 0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Wie die Abbildungen 11 für $K_{l_1 l_3 n}$ zeigen (es wurde $E_{rel 0} = 10$ MeV gesetzt), hängt die Korrelationsfunktion und damit die Streuamplitude und der WQ stark von den beteiligten Drehimpulsen l_1, l_3 der Ejektile und der Korrelationsquantenzahl n ab. Die Anzahl der Knoten ist auch hier identisch der Zahl n . Schließlich sei hier noch vermerkt, daß zur vollständigen Beschreibung fünf Korrelationsquantenzahlen n ausreichen [6].

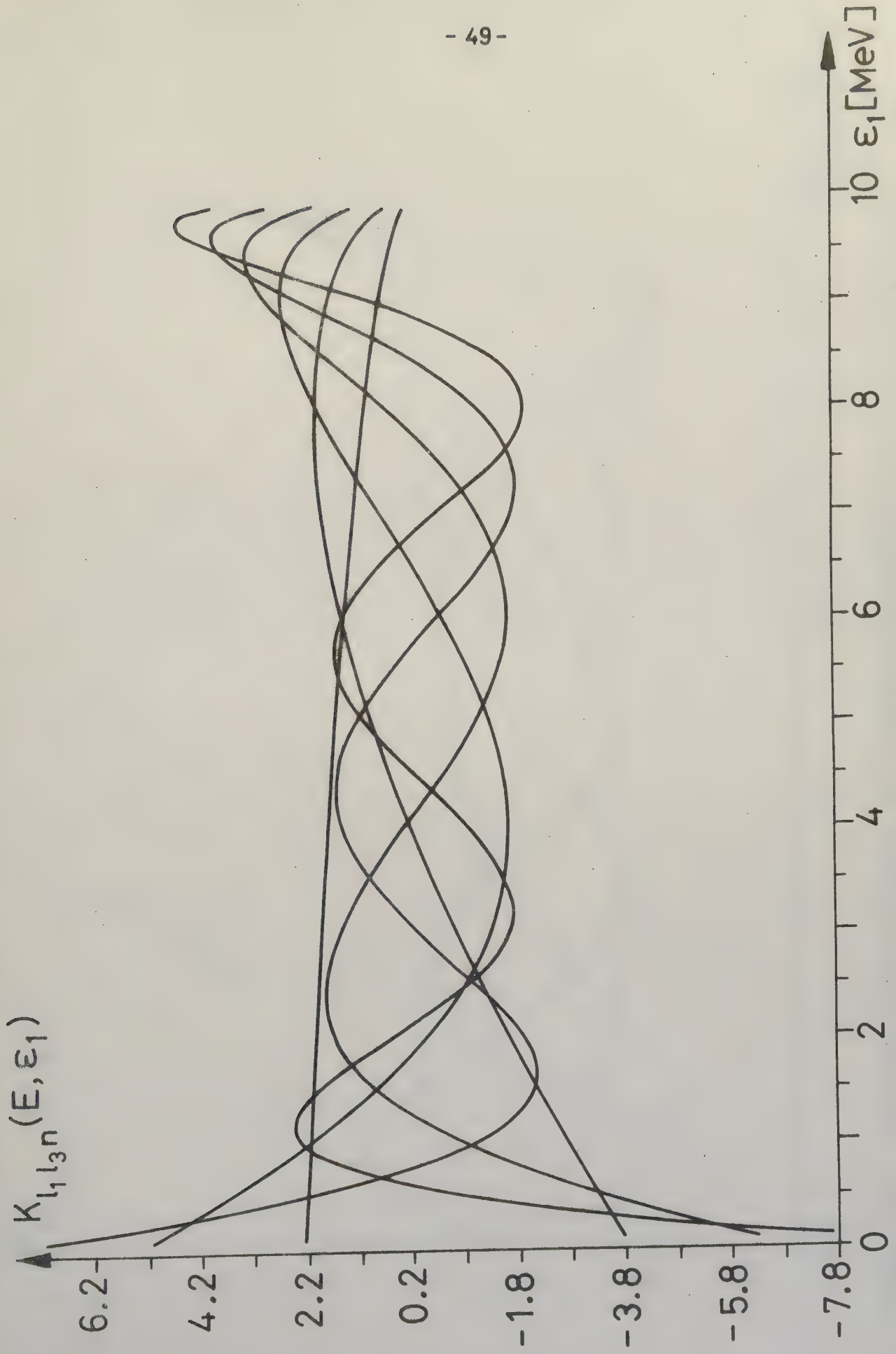


Abb. 11a Korrelationsfunktion im Ausgangskanal für $l_1=0, l_3=1, n=0, \dots, 5$

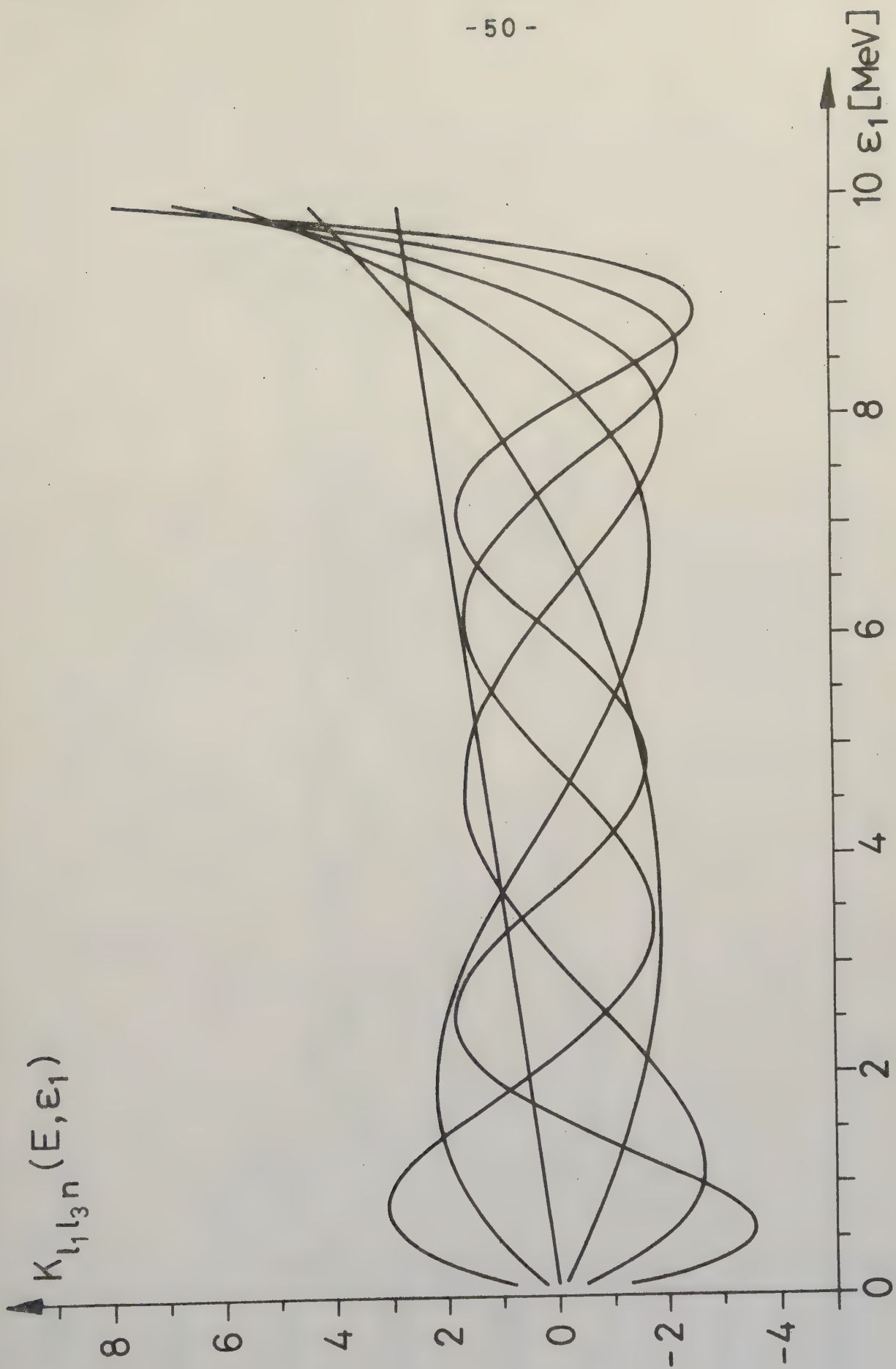


Abb.11b Korrelationsfunktion im Ausgangskanal für $l_1=2, l_3=0, n=0, \dots, 5$

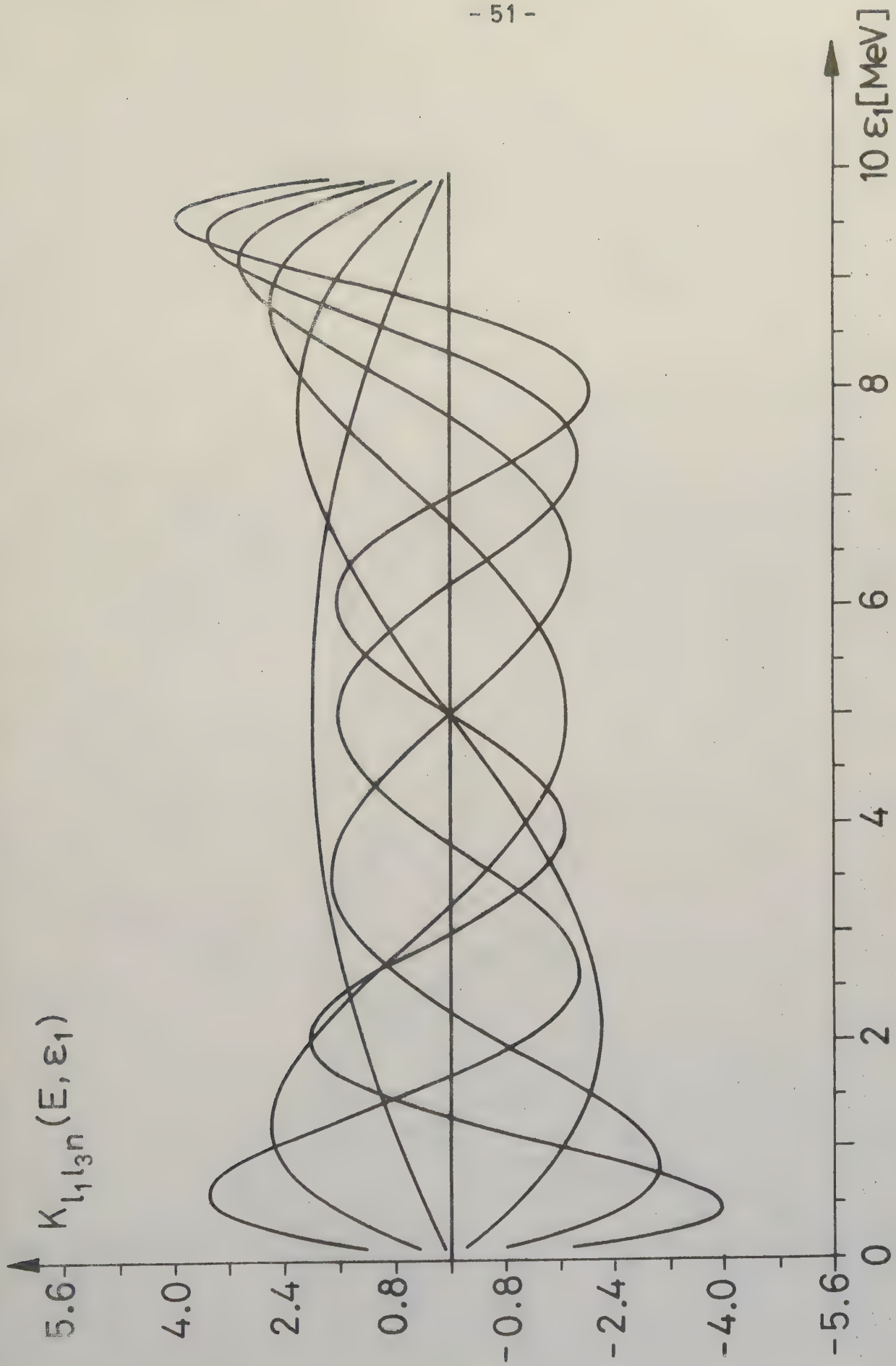


Abb. 11c Korrelationsfunktion im Ausgangskanal für $l_1=2, l_3=2, n=0, \dots, 5$

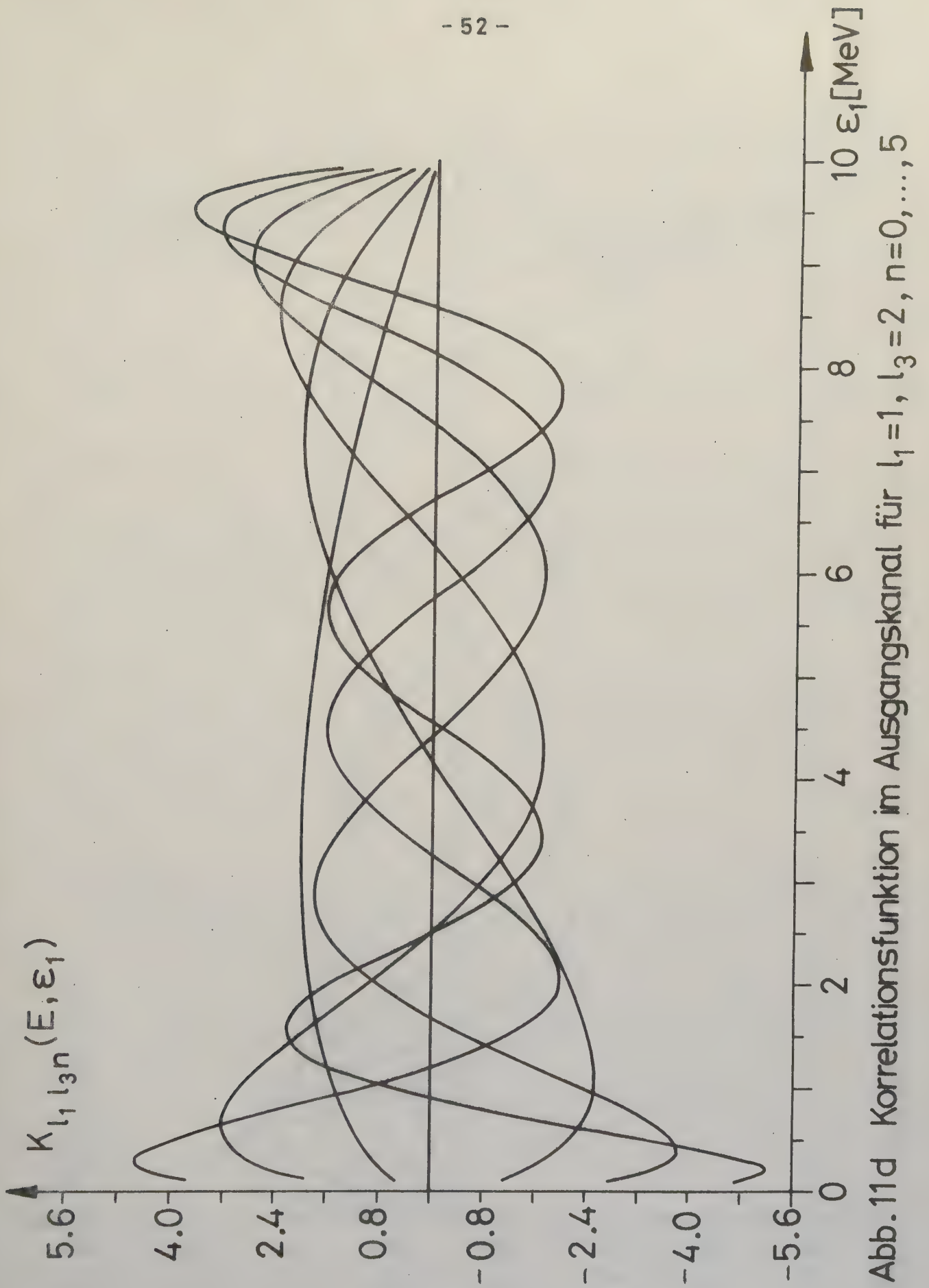


Abb. 11d Korrelationsfunktion im Ausgangskanal für $l_1=1, l_3=2, n=0, \dots, 5$

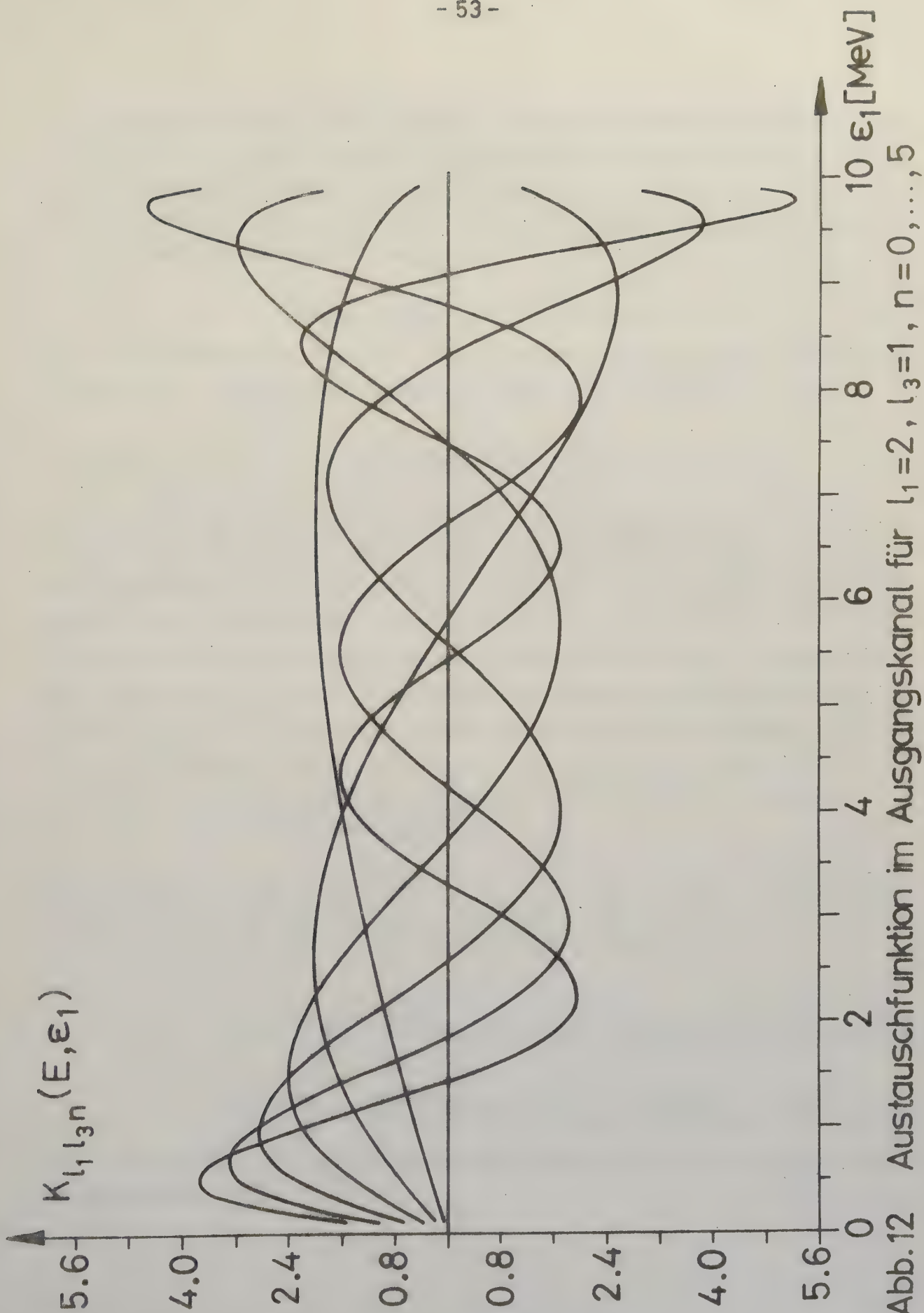


Abb.12 Austauschfunktion im Ausgangskanal für $l_1=2, l_3=1, n=0, \dots, 5$

Zusammenfassend stellen wir fest, daß wir durch Analyse eines experimentell vorliegenden Wirkungsquerschnittes explizit die Teilchenkorrelationen angeben können.

Werden die Kanalspins Σ nicht beobachtet, dann ist über sie mit einem Gewichtungsfaktor zu summieren

$$d\sigma_{r', r} = \sum_{\Sigma, \Sigma'} g(\Sigma) \cdot d\sigma_{r', \Sigma', r \Sigma} \quad (94)$$

Den Gewichtungsfaktor für die doppelte Nukleonen-Emission, einer von Deuteronen induzierten Reaktion, haben wir im Anhang A4 zu

$$g(\Sigma) = \frac{2\Sigma + 1}{(2S + 1)(2J_h + 1)}$$

berechnet. $g(\Sigma)$ gibt die relative Wahrscheinlichkeit an, in einem unpolarisierten Strahl den Kanalspin Σ zu finden. S ist der Gesamtspin des Projektils (im Falle von Deuteronen ist $S=1$) und J_h ist der Kernspin des Targets.

Um die Leistungsfähigkeit dieser Aussagen zu prüfen, berechnen wir im Kapitel III den differentiellen Wirkungsquerschnitt für eine $N^{14}(d, 2n)O^{16}$ -Reaktion. Dafür haben wir die Gleichung (93) für die Streuamplitude $T_{r', \dots, \mu \Sigma}$ mit $l_1=l_n, l_3=l_p$ und $L=l_d$ zu spezialisieren. Für den Compoundkern O^{16} zu $J^\pi = 0^+$ erhalten wir dann einen einfachen Ausdruck

$$T_{r', \Sigma', \mu \Sigma', r \Sigma \mu \Sigma} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \sum_{l_n=0}^{\infty} \sum_{l_p=0}^{\infty} \sum_{l_d=l_n+l_p}^{l_n+l_p} \sum_{m_{l_d}=-l_d}^{l_d} \sum_{m_{l_1}=-l_1}^{l_1} \sum_{m_{l_3}=-l_3}^{l_3} \sum_{m_{l_3'}=-l_3'}^{l_3'} i^{l_n+l_p-(l_1'+l_3')}$$

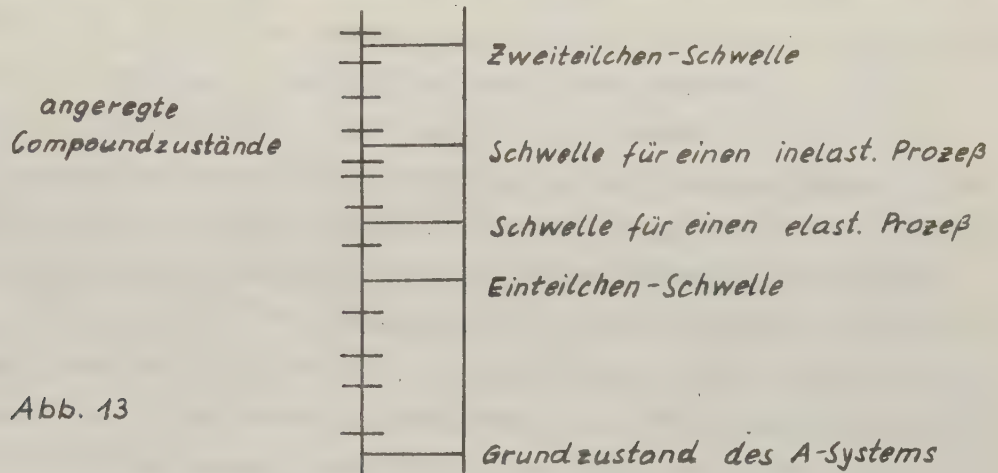
$$(2l_p+1)^{\frac{1}{2}} (2l_n+1)^{\frac{1}{2}} \tilde{K}_{l_1 l_3' 0}(\arctg \sqrt{\epsilon_1}) \cdot (0 m_{l_p} m_{l_d} | l_n l_p l_d) (\mu \Sigma m_{l_d} 0 | \Sigma l_d 0)$$

$$(L' \Sigma' 0 | m_{L'} \mu \Sigma' 0) (l_1 l_3' L' | m_{l_1} m_{l_3'} m_{L'}) Y_{l_1 m_{l_1}}(\vartheta_1 \varphi_1) Y_{l_3' m_{l_3'}}(\vartheta_2 \varphi_2) S_{r' \Sigma' L', r \Sigma L}.$$

Eine Anwendung auf die doppelte Nukleonen-Emission bringen wir im Abschnitt (3.2) .

2.2 Schalenmodell-Beschreibung des Zweiteilchen-Kontinuums

Das Zweiteilchen-Kontinuum ist in mehrfacher Hinsicht ungleich schwieriger in der Behandlung als das Einteilchen-Kontinuum, weil der Satz von Basisfunktionen im allgemeinen nicht nur diskrete Anteile enthält, und weil unter der Zweiteilchen-Schwelle eine große Anzahl von Einteilchen-Kanäle offen ist. Schematisch gilt



Die Anregung in Kanäle mit drei Fragmenten soll nun näher untersucht werden. Ein System von A-Nukleonen wird durch einen Hamiltonoperator

$$H = H(1, 2, 3, \dots, A)$$

charakterisiert. Das Schalenmodell - Konzept geht nun davon aus, daß sich H aufteilen läßt in einen Schalenmodell-Anteil H_0 und eine Restwechselwirkung V nach Maßgabe:

$$H = H_0 + V$$

H_0 wird dargestellt durch eine Summe über Einteilchen-Operatoren

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h_i \quad \text{mit} \quad h_i = t_i + v_i$$

Die Restwechselwirkung ist eingeführt als Differenz zwischen der Nukleon-Nukleon-Kraft und dem Einteilchenpotential

$$V = \sum_{i < j = 1}^A v_{ij} - \sum_{i=1}^A v_i$$

Für die Anschlußbedingung der Außenraumlösungen im Zweiteilchen-Kontinuum ist es günstiger, wegen Eindeutigkeit, nur eine Radialkoordinate zu haben. Wir wählen deshalb eine Schalenmodell-Zerlegung von H in H_0 und V derart, daß H_0 aufgebaut wird aus Operatoren h_r

$$H_0 = \sum_r h_r \quad \text{mit} \quad h_r = \sum_{i=1}^2 h_i$$

Die Rest-WW wird in ihrer ursprünglichen Definition beibehalten. Zur Erläuterung auf das hier definierte Schalenmodell sei auf das Beispiel im Anhang A2 verwiesen. Dort haben wir für die gebundenen Zustände, unter der Annahme eines Parabelpotentials, die Wellenfunktion berechnet und das Energiespektrum konstruiert. Nach der Schalenmodell-Vorstellung in einer Theorie der Kernreaktionen sind nun die $(A-2)$ Nukleonen in gebundenen Zuständen und zwei Teilchen im Kontinuum. Die Einführung des Operators h_r gestattet uns nun eine formale Analogie, zu der Schalenmodell-Theorie der Kernreaktionen mit einem Teilchen im Kontinuum und $(A-1)$ gebundenen Teilchen, zu finden. Mit den Eigenfunktionen zu h_r nach Gl. (98) führen wir einen diskreten Satz ein, nach dem die Streufunktion entwickelt und die S-Matrix bestimmt wird. Die Berechnung der S-Matrix wird über die Dreiteilchen-R-Matrix vorgenommen, weil

- a) durch eine einzige Diagonalisation des Hamiltonoperators $H = H_0 + V$ die S-Matrix im gesamten Energie-Bereich bestimmt ist und
- b) die so berechnete S-Matrix unitär ist.
- c) Die Genauigkeit der S-Matrix ist abhängig von der Anzahl der berücksichtigten Niveaus in einem bestimmten Energie-Bereich [15] und kann durch geeignete Wahl der Randbedingung im Prinzip auf ein paar Prozent genau bestimmt werden.

Nachteilig kann sich der diskontinuierliche Übergang der Wellenfunktion am Matching-Radius und die Verletzung der Kanalorthogonalität zwischen den offenen und geschlossenen Kanälen auswirken [19].

Die R-Matrix-Technik verlangt eine Aufteilung des Konfigurationsraumes in zwei Bereiche: einen inneren (i) oder Wechselwirkungsbereich und einen äußeren (a) oder wechselwirkungsfreien Bereich.

Den Radius, der (i) von (a) trennt, nennen wir Matching-Radius R . Bei dieser Aufspaltung wird das System im Gebiet $r \geq R$ durch einen Hamiltonoperator bestimmt, der die Relativbewegung der Reaktionsprodukte in jedem Kanal beschreibt. Im Innenbereich ist der Vielteilchen-Hamiltonoperator mit bestimmten Randbedingungen, die frei gewählt werden können, zu lösen.

Im Folgenden dienen c und v zur Charakterisierung der Zwei- bzw. Dreiteilchen-Kanäle. R_c und R_v sind die entsprechenden Kanalradien, die einen inneren Bereich definieren und für die offenen und geschlossenen Kanäle gleich gewählt werden können. Die konstante Randbedingung $\tilde{b}_c$ bzw. $\tilde{b}_v$ kann ebenfalls für die offenen und geschlossenen Kanäle denselben Wert besitzen. Der Oberflächenoperator

$$\mathcal{L}(\tilde{b}_v) = \frac{\hbar^2}{2m} \delta(r_v - R_v) \left(\frac{d}{dr_v} - \frac{\tilde{b}_v^{-1}}{R_v} \right) \quad (96)$$

für den Dreiteilchenkanal v , sichert die logarithmische Anschlußbedingung an die Außenraumlösungen. Die Basisvektoren $\tilde{\phi}_{\Delta v}$ für zwei Kontinuumsteilchen erfüllen dann die Eigenwertgleichung

$$(H_0 + \mathcal{L} - E) \tilde{\phi}_{\Delta v} = \mathcal{L} \tilde{\phi}_{\Delta v} \quad (97)$$

Den Oberflächenoperator $\mathcal{L}$ für die Dreiteilchen-Kanäle haben wir analog den Zweiteilchen-Kanälen (einer Darstellung von Bloch [11]) eingeführt. Die sich aus Gl. (97) ergebenden Eigenwerte sind

$$E_{\Delta} = (\hbar k_{\Delta})^2 / 2m \quad \text{mit den zugehörigen Eigenfunktionen} \quad (98)$$

$$\tilde{\phi}_{\Delta v} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{r^2} J_{l_1+l_3+2n+2}(X_0) \\ \frac{B}{r^2} J_{l_1+l_3+2n+2}(X_1) + \frac{C}{r^2} N_{l_1+l_3+2n+2}(X_1) \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R_0 \\ R_0 \leq r \leq R_v \end{array} \right.$$

Die Argumente der Zweiteilchenfunktionen sind definiert durch

$$X_0 = r \left(k_{\Delta}^2 + 2 \frac{2mV_0}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad X_1 = r k_{\Delta} \quad (99)$$

Der Kernrand ist durch R_0 fixiert. Die drei auftretenden Konstante A, B und C sind durch die logarithmische Ableitung am Kernrand

und die Normierung für den Bereich (i) innerhalb eines Viertelkreises eindeutig festgelegt. Insgesamt erhalten wir für den (r, α) -Bereich

$$\phi_{\Lambda r}(r, \alpha) = \tilde{\phi}_{\Lambda r}(r) \cdot \tilde{K}_{l_1, l_2, n}(\alpha). \quad (100)$$

Im Hinblick darauf, daß wir uns der Schalenmodell-Technik bedienen wollen, setzen wir die Zweiteilchenfunktion über den Viertelkreis analytisch in das Quadrat, das durch die Koordinaten r_1 und r_2 definiert wird fort. Diese Bereichserweiterung verdient in doppelter Hinsicht unsere Aufmerksamkeit: Der Bereich (entsprechend Kontur Q), aufgespannt durch die Vektoren $\varphi_1(r_1)$ und $\varphi_2(r_2)$, wird durch Zustände $\phi_{\Lambda r}$ besetzt, die von einem kleineren Bereich stammen. Zweitens sind die Zustandsvektoren $\phi_{\Lambda r}$ innerhalb Q nicht orthogonal. Zur Untersuchung der Einflüsse im ersten Fall genügt es, zwei verschiedene Konturen I und II zu wählen.

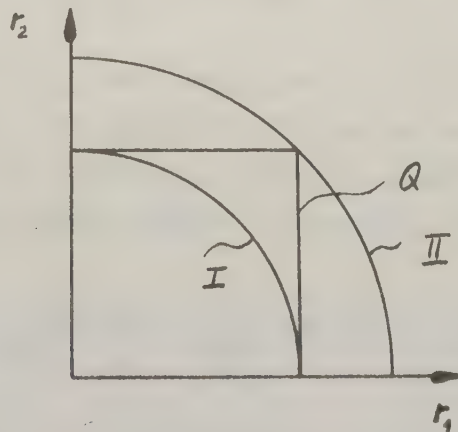


Abb. 14

Die Zustände innerhalb der Kontur I führen zu einer Unterbesetzung und die Zustände innerhalb von II zu einer größeren Zustandsdichte innerhalb der Kontur Q . Die Nichtorthogonalität der Basisvektoren bildet keine ernste Schwierigkeit, da man das Basissystem innerhalb Q orthogonalisieren oder die Diagonalisation in einer nicht-orthogonalen Basis ausführen kann. Da die Integrale über die Zweiteilchenfunktion innerhalb der Grenzen $0 \leq \{r_1, r_2\} \leq a$ nicht geschlossen angebar sind, ist es vernünftig, auf die Orthogonalisation zu verzichten und die Diagonalisation mit nicht-orthogonalen Basisvektoren durchzuführen. Weiterhin

wird damit die Zahl der Kanal-Projektionen in die Dreiteilchen-Kanäle reduziert. $|\phi_\sigma\rangle$ und $|\phi_{\sigma'}\rangle$ seien solche nicht-orthogonalen Zweiteilchenvektoren, mit denen wir das Eigenwertproblem

$$(H - E)|\phi_\sigma\rangle = 0$$

zu lösen haben. Durch Multiplikation mit $|\phi_{\sigma'}\rangle$ von links, erhalten wir

$$\langle\phi_{\sigma'}|H|\phi_\sigma\rangle - \langle\phi_{\sigma'}|E|\phi_\sigma\rangle = 0.$$

Die Eigenwerte $E_{\sigma'\sigma}$ erhalten wir durch Diagonalisation der Matrix

$$A_{\sigma'\sigma} = H_{\sigma'\sigma} \cdot I_{\sigma'\sigma}^{-1}$$

mit

$$H_{\sigma'\sigma} = \langle\phi_{\sigma'}|H|\phi_\sigma\rangle \quad \text{und} \quad I_{\sigma'\sigma} = \langle\phi_{\sigma'}|\phi_\sigma\rangle.$$

Im einzelnen entwickeln wir die Zweiteilchen-Basisvektoren Gl. (100) nach unkorrelierten Schalenmodell-Zustände $|1\rangle$ und $|3\rangle$, wie wir sie durch Integration der radialen Einteilchen-Schrödinger-Gleichung beispielsweise mit Saxon-Woods-Potential erhalten (siehe 3.1)

$$\phi_{\Lambda r}(r, \alpha) = \sum_{1,3} a_{1,3}(\Lambda, r) \cdot |1\rangle \cdot |3\rangle. \quad (101)$$

$\phi_{\Lambda r}$ ist orthonormal im (r, α) -Bereich und wird im (r_1, r_2) -Bereich normiert. "1" und "3" steht für die relevanten Quantenzahlen die zur Spezifikation eines Einteilchen-Zustandes notwendig sind. Λ charakterisiert die Zweiteilchen-Zustände und steht als Abkürzung für den Satz von Quantenzahlen $\{l_1, l_3, n, b, a\}$, und r ist ein Zweiteilchen-Kanalindex. Der Entwicklungskoeffizient (siehe hierzu Tabelle III) ist

$$a_{1,3}(\Lambda, r) = \langle 3 | \langle 1 | \phi_{\Lambda r}(r, \alpha) \rangle. \quad (101.1)$$

Für die R-Matrix-Basiszustände folgt damit

$$\tilde{\chi}_{\Lambda, r} = \mathcal{A} \left\{ \phi_{\Lambda r} \cdot y_{J_P J_h}^M \right\}. \quad (101.2)$$

$\mathcal{A}$ ist ein Antisymmetrisierungs-Operator und sorgt für Antisymmetrisierung der beiden Teilchen im Kontinuum und den (A-2) gebundenen Teilchen. $\tilde{\mathcal{Y}}_{J_p J_h}^M$ enthält alle Winkel- und Spin-Anteile des Targets und der beiden Teilchen, sowie die radialen Lochfunktionen der beiden Löcher

$$\mathcal{Y}_{J_p J_h}^M = \left[J_h \otimes \left[[l_1 \otimes s_1]^{j_1} \otimes [l_3 \otimes s_3]^{j_3} \right]^{J_p} \right]_M^J \cdot \phi_{r\Sigma} \quad (103)$$

$$= \sum_{\mu_1, \mu_3, \lambda_1, \lambda_3, m_1, m_3, M_h, M_p} (-)^{J_h + M_h} (J_h J_p J | -M_h M_p M) (j_1 j_3 J_p | m_1 m_3 M_p) (l_1 s_1 j_1 | \lambda_1 \mu_1 m_1) \\ (l_3 s_3 j_3 | \lambda_3 \mu_3 m_3) \mathcal{Y}_{J_h M_h} Y_{l_1 \lambda_1} Y_{l_3 \lambda_3} \chi_{s_1 \mu_1} \chi_{s_3 \mu_3} \phi_{r\Sigma}.$$

$$\mathcal{X}_0(1, 2, 3, \dots, A-2) \mathcal{Y}_{J_h M_h} = \epsilon_{J_h} \mathcal{Y}_{J_h M_h}$$

Damit schreibt sich die Basis

$$\tilde{\chi}_{\Lambda r} = \sum_{1,3} a_{1,3}(\Lambda, r) \left| \phi_{24}^{13} \right\rangle_{J_p, J_h}^{J, M} \quad (104)$$

mit

$$\left| \phi_{24}^{13} \right\rangle_{J_p, J_h}^{J, M} = \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_4 \\ m_1, \dots, m_4 \\ M_p, M_h}} (-)^{J_h + M_h} (J_h J_p J | -M_h M_p M) (j_1 j_3 J_p | m_1 m_3 M_p) (j_2 j_4 J_h | m_2 m_4 M_h) \cdot \\ (l_1 s_1 j_1 | \lambda_1 \mu_1 m_1) (l_2 s_2 j_2 | \lambda_2 \mu_2 m_2) (l_3 s_3 j_3 | \lambda_3 \mu_3 m_3) \cdot \\ (l_4 s_4 j_4 | \lambda_4 \mu_4 m_4) Y_{l_1 \lambda_1} Y_{l_2 \lambda_2} Y_{l_3 \lambda_3} Y_{l_4 \lambda_4} \chi_{s_1 \mu_1} \chi_{s_2 \mu_2} \\ \chi_{s_3 \mu_3} \chi_{s_4 \mu_4} |1\rangle |2\rangle |3\rangle |4\rangle. \quad (104.1)$$

Damit wird die Diagonalisation des Vielteilchen-Hamiltonoperators

$$H = \sum_{i,j} T_{ij} a_i^\dagger a_j + \sum_{i,j,k,l} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \quad (105)$$

im Unterraum der (2p2h)-Anregungen vorgenommen. Für die Matrixelemente (Anhang A5) mit zwei Teilchen im Kontinuum erhalten wir

$$\mathcal{H} = \langle \tilde{X}_{\Lambda, r} | H | \tilde{X}_{\Lambda, r'} \rangle = \sum_{1,3,5,7} G \cdot \langle \phi_{2,4}^{1,3} | H | \phi_{6,8}^{5,7} \rangle_{jj}$$

Die Kopplungsstärke $G = a_{1,3,5,7} a_{5,7,6,8}$ drückt aus, wie stark die Kontinuums-Zustände miteinander verkoppelt sind. Für ein Modell unabhängiger Teilchen ist $G=1$.

Die Diagonalisation liefert die Eigenwerte E_{Λ} von H und die Eigenfunktionen X_{Λ} sind

$$X_{\Lambda} = \sum_{r=1}^K \sum_{\Lambda=1}^{N_r} V_{\Lambda}(\Lambda, r) \cdot \tilde{X}_{\Lambda, r}. \quad (106)$$

Die Partialbreiten sind wie folgt festgelegt

$$\Gamma_{\Lambda, r} = \sum_{\Lambda=1}^{N_r} V_{\Lambda}(\Lambda, r) \cdot \tilde{\Gamma}_{\Lambda, r} \quad (107)$$

Die Beimischungskoeffizienten V_{Λ} sind von der Diagonalisation her bekannt. K spezifiziert die Anzahl der Kanäle und N_r die Anzahl von Niveaus pro Kanal. Damit liegen die R-Matrix-Elemente und S-Matrix-Elemente gemäß dem Kopplungsschema Gl.(103) fest. Bei der Herleitung des Reaktionsquerschnittes wird man aber auf eine Darstellung der S-Matrix geführt, die ein von Gl.(103) verschiedenes Kopplungsschema besitzt. Dort wird eine Klassifikation der Kanäle wie folgt vorgenommen

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{J \Sigma L}^M &= \left[\left[J_h \otimes [s_1 \otimes s_3]_{m_{13}}^{s_{13}} \right]_{\mu_{\Sigma}}^{\Sigma} \otimes [l_1 \otimes l_3]_{m_L}^L \right]_M^J \cdot \phi_{r \Sigma} \\ &= \sum_{\substack{\mu_{\Sigma} m_L \lambda_1 \lambda_3 \\ M_h m_{13} \mu_1 \mu_3}} (\Sigma L J | \mu_{\Sigma} m_L M) (l_1 l_3 L | \lambda_1 \lambda_3 m_L) (J_h s_{13} \Sigma | M_h m_{13} \mu_{\Sigma}) \\ &\quad (s_1 s_3 s_{13} | \mu_1 \mu_3 m_{13}) y_{J_h M_h} y_{l_1 \lambda_1} y_{l_3 \lambda_3} x_{s_1 \mu_1} x_{s_3 \mu_3} \phi_{r \Sigma}. \end{aligned} \quad (108)$$

Damit erhalten wir für die Kanalspin-Darstellung

$$| \phi_{2,4}^{1,3} \rangle_{\Sigma, L}^{J, M} = \tilde{y}_{J \Sigma L}^M | 1 \rangle | 3 \rangle. \quad (109)$$

Die unitäre Transformation, die beide Darstellungen (103) und (108) miteinander verknüpft, läßt sich durch einen Transformationskoeffizienten $K_{\Sigma L, J_p J_h}^J$ angeben, den wir im Anhang A6 berechnen

$$K_{\Sigma L, J_p J_h}^J = (-)^{2S_3 + j_3 - j_1 + L + \Sigma + J} \hat{s}_{13} \hat{j}_1 \hat{j}_3 \hat{L} \hat{\Sigma} \hat{J}_p \left\{ \begin{matrix} J_p J_h J \\ \Sigma L S_{13} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 j_3 J_p \\ l_1 l_3 L \\ s_1 s_3 s_{13} \end{matrix} \right\} \quad (110)$$

Fassen wir die wesentlichen Gesichtspunkte noch einmal zusammen: In einem Modell in dem sich die Teilchen unabhängig voneinander bewegen, werden die Zustände "1" und "3" unabhängig voneinander besetzt

$$|\phi_{24}^{13}\rangle = a_1^+ a_3^+ a_4 a_2 |0\rangle. \quad (111)$$

In Wirklichkeit wird diese Besetzung nicht unabhängig voneinander erfolgen, da Teilchen "3" mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit das Niveau von "1" bevölkert und umgekehrt. Führen wir korrelierte Basiswellenfunktionen ein, so folgt

$$|\tilde{\phi}_{24}^{13}\rangle = \sum_{1,3} a_{1,3} \cdot |\phi_{24}^{13}\rangle. \quad (112)$$

Mit anderen Worten, wir bestimmen die korrelierte Wellenfkt. in Termen der Schalenmodell-Näherung und berücksichtigen explizit die Korrelationskoeffizienten $a_{1,3}$ aus Tabelle III.

2.3 Dreiteilchen-R-Matrix

Dieser Abschnitt ist der Behandlung der Mehrkanal-R-Matrix für zwei Teilchen im Kontinuum gewidmet. Wir starten von den Eigenwertgleichungen, für zwei verschiedene Energien E_1 und E_2 , eines A-Nukleonensystems mit dem Hamiltonoperator $H = V - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} \Delta_{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \Delta_{\mu_2} \right) = V - \frac{\hbar^2}{2\mu_r} \Delta_r$

$$H \Psi_1 = E_1 \Psi_1 \quad \text{und} \quad (H \Psi_2)^+ = E_2 \Psi_2^+$$

Unter Beachtung der Hermitizität der zweiten Gleichung multiplizieren wir die erste mit Ψ_2^+ und die zweite mit Ψ_1 und subtrahieren beide voneinander

$$(E_2 - E_1) \int \Psi_2^+ \Psi_1 d\tau = \frac{\hbar^2}{2\mu_r} \int \left\{ \Psi_2^+ \Delta_r \Psi_1 - \Psi_1 \Delta_r \Psi_2^+ \right\} d\tau. \quad (114)$$

$d\tau$ ist hier das Volumenelement im 6-dimensionalen Raum (siehe Anhang A3) und Δ_r der entsprechende Laplace-Operator. Wir identifizieren nun die Wellenfunktion Ψ_1 mit Ψ_r^{int} zum Eingangskanal r und entwickeln diese nach einem vollständigen Satz von Zuständen X_Λ (wie wir sie im vorangegangenen Abschnitt eingeführt haben):

$$\Psi_r^{int} = \sum_{\Lambda} A_{r\Lambda} X_{\Lambda} \quad (115)$$

mit

$$A_{r\Lambda} = \int \tau X_{\Lambda}^* \cdot \Psi_r^{int} \quad (116)$$

Die Wellenfunktion Ψ_2 setzen wir gleich den Modellzuständen X_{Λ} . An der Kanaloberfläche $r_r = a_r$ schließen wir die Innenraum-Lösungen an. Die Kanaloberfläche selbst wird durch eine Polyeder-Fläche begrenzt, auf der die Kanalwellenfunktionen orthonormiert sind

$$|\varphi_r\rangle \langle \varphi_{r'}| = \delta_{r'r}.$$

Mit dem Greenschen Satz überführen wir die rechte Seite der Gleichung (114) auf ein Oberflächenintegral. Die Vollständigkeit

der Funktion ψ_r ist uns dann behilflich, eine explizite Darstellung für die Größen $A_{r\Lambda}$ zu finden

$$A_{r\Lambda} = \frac{\hbar^2}{2\mu_r(E_\Lambda - E)} \left\{ \langle \chi_\Lambda^* | \psi_r \rangle \langle \psi_r^* | \frac{\partial}{\partial r_r} \psi_r^{int} \rangle - \langle \psi_r^{int} | \psi_r^* \rangle \langle \psi_r | \frac{\partial}{\partial r_r} \chi_\Lambda^* \rangle \right\}. \quad (117)$$

Die asymptotische Wellenfunktion in Termen von der Kanalfunktion ist

$$\Psi^{ext} = \sum_r \Phi_r^{ext} \psi_r \quad (118)$$

Der Entwicklungskoeffizient Φ_r^{ext} enthält nur die Radialanteile und hat die Gestalt

$$\Phi_r^{ext} = A_r I_r - \sum_{r'} S_{rr'} A_{r'} O_r. \quad (119)$$

Damit lassen sich die Anschlußbedingungen an der Kanaloberfläche formulieren

$$\begin{aligned} \left. \psi_r^{int} \right|_{r_r=a_r} &= \sum_{r(a_r)} \left\{ \Phi_r^{ext} \cdot \psi_r \right\}_{r_r=a_r} \quad \text{mit} \quad \Phi_r^{ext} = \langle \psi_r^* | \psi_r^{int} \rangle_{r_r=a_r} \\ \left. \frac{\partial \psi_r^{int}}{\partial r_r} \right|_{r_r=a_r} &= \sum_{r(a_r)} \left\{ \frac{\partial \Phi_r^{ext}}{\partial r_r} \cdot \psi_r \right\}_{r_r=a_r} \quad \text{mit} \quad \Phi_r^{ext'} = \langle \psi_r^* | \psi_r^{int'} \rangle_{r_r=a_r} \end{aligned} \quad (120)$$

Für die Streulösung zur Energie E folgt

$$\Psi(E) = \sum_\Lambda \sum_r \frac{\hbar^2}{2\mu_r(E_\Lambda - E)} \left\{ \phi_{\Lambda r}(r_r) \cdot \Phi_r^{ext'} - \Phi_r^{ext} \cdot \phi_{\Lambda r}(r_r) \right\}_{r_r=a_r} \cdot \chi_\Lambda(r_r) \quad (121)$$

und für einen bestimmten Ausgangskanal

$$\psi_r(r_r) = \sum_{r'} R_{rr'} \left\{ \Phi_{r'}^{ext'}(r_{r'}) - \Phi_{r'}^{ext}(r_{r'}) \cdot \frac{b_{r'}}{r_{r'}} \right\}_{r_{r'}=a_{r'}} \quad (122)$$

mit $\Gamma_{\Lambda r} = \left(\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \right)^{1/2} \phi_{\Lambda r}(a_r)$

und $R_{rr'} = \sum_\Lambda \frac{\Gamma_{\Lambda r} \Gamma_{\Lambda r'}}{E_\Lambda - E} \quad (123)$

Hieraus folgt in der üblichen Form die S-Matrix in Termen der R-Matrix

$$S = (ka)^{\frac{1}{2}} O^{-1} [1 - RL_o]^{-1} [1 - RL_o^*] I (ka)^{-\frac{1}{2}} \quad (124)$$

mit

$$L_o = L - b \quad \text{und} \quad L_o^* = L^* - b.$$

Die S-Matrix im Wirkungsquerschnitt Gl. (92) erscheint in der Kanalspin-Kopplung mit den Quantenzahlen $\{r \Sigma L\}$. Durch entsprechende Umkopplung mit dem Koeffizienten K aus Gleichung A 6.7, findet man den folgenden Zusammenhang zwischen der Matrix $S_{r' \Sigma' L'; r \Sigma L}^{J, L \Sigma}$ in dieser Darstellung und der Matrix

$S_{r' L' J_p'; r L J_p}^{J, J_p J_h}$, wie sie aus der R-Matrix folgt:

$$S_{r' \Sigma' L'; r \Sigma L}^{J, L \Sigma} = \sum_{J_p, J_p'} \left\{ K_{r \Sigma L J_p}^J S_{r' L' J_p'; r L J_p}^{J, J_p J_h} K_{r' \Sigma' L' J_p'}^J \right\}. \quad (125)$$

Damit ist es möglich, bei gegebener Kinematik, den Spins und den Drehimpulsen, nach Gl. (92) den partiellen Wirkungsquerschnitt zu berechnen.

2.4 Andere Approximationsmöglichkeiten für eine Dreiteilchen-Reaktion

Die bisherigen Betrachtungen beschränkten sich auf die Konstruktion von Modellzuständen, wie sie bei der R-Matrix-Technik verwendet werden. Die Loslösung von diesem Konzept der unphysikalischen Zustände geschieht in der Eigenkanal-Theorie EKT von Danos und Greiner [4], [6] durch die Verwendung von natürlichen Randbedingungen, die eine Diskontinuität am Matching-Radius sowohl für die Zweiteilchen als auch Mehrteilchen-Kanäle vermeidet. Die S-Matrix ist beliebig genau bestimmbar. In Kürze wollen wir hier das Verfahren für die Dreiteilchen-Kanäle dieser Theorie skizzieren. Die Behandlung des Einteilchen-Kontinuums und seine Anwendung auf die Nukleonen- und Elektronenstreuung wurde ausführlich untersucht, Greiner in Cargèse Lectures in Physics (siehe hierzu Ref. [4]). Als Resultat dieser Rechnungen halten wir die gute Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment fest. Ausgangspunkt dieser Theorie ist die Asymptotik der Wellenfunktion in den verschiedenen Dreiteilchen-Kanälen, von der wir die log. Ableitung am Matching-Radius für ein Wertepaar (E, δ) berechnen. Hierbei ist $E = \epsilon_1 + \epsilon_2$ die kin. Energie der Relativbewegung und δ die Streuphase im Dreiteilchen-Kanal. Unter Beachtung dieser Randbedingungen suchen wir Lösungen der Dreiteilchen-Schrödinger-Gleichung (26a), die wir entsprechend dem Abschnitt 2.2 nach einem vollständigen Satz von unkorrelierten Schalenmodellzuständen entwickeln. Die Zweiteilchen-Kanäle behandeln wir wie in Ref. [4] beschrieben. Mit diesen Lösungen wird dann die Diagonalisation des Hamiltonoperators vorgenommen. Durch Variation der Kanalenergie und der Phase δ suchen wir alle Eigenwerte des Vielteilchen-Hamiltonoperators in dem uns interessierenden Energiebereich. Haben wir einen Eigenwert gefunden, dann identifizieren wir die zugehörige Phase δ als die Eigenphase und berechnen mit den Eigenvektoren die S-Matrix. Geben wir in den Dreiteilchen-Kanälen die logarithmische Ableitung von auslaufenden Wellen vor, wie sie Kapur und Peierls [34] für die Zweiteilchen-Kanäle benutzten, dann werden die reduzierten Weiten und die Energie komplex und energieabhängig. Randbedingungen dieser Art und konstante Randbedingungen sind

systemfremd und führen zu Diskontinuitäten am Matching-Radius, die zu spuriosen Peaks führen können.

Aus diesem Grund ist es wünschenswert, eine Theorie zu formulieren, die ohne solche Annahmen auskommt. Eine Möglichkeit besteht darin, mit dem Operator nach Gl.(95) und den korrelierten Zweiteilchen-Wellenfunktionen eine Verallgemeinerung der Fano-Methode auf Dreiteilchen-Kanäle zu vollziehen. Die notwendigen Diagonalisationen können im $(r\alpha)$ -Bereich ausgeführt und die S-Matrix direkt berechnet werden. Wir folgen Fano[32] und starten mit der Eigenfunktion zum gesamten Hamiltonoperator

$$\Psi_v(E) = \sum_i b_{iv}(E) \cdot \phi_i + \int_{E'} dE' a_E(E') \psi_v(E') \quad (126)$$

v indiziert die Dreiteilchen-Kanäle und i die Anzahl der gebundenen Zweiteilchen-Zustände. $\psi_v(E')$ ist ein Dreiteilchen-Streuzustand und ist Eigenfunktion zu

$$H_0 \psi_v = E' \psi_v \quad (127)$$

Für einen einzigen gebundenen Zweiteilchen-Zustand vereinfacht sich der Ansatz zu

$$\Psi_v(E) = b_{1v}(E) \cdot \phi_1 + \int_{E'} dE' a_E(E') \cdot \psi_v(E') \quad (128)$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Schröd.-Gleichung ein und multiplizieren diese von links mit $|\phi_1\rangle$ bzw. $|\psi_v(E')\rangle$, dann erhalten wir ein System von zwei gekoppelten Gleichungen bezüglich b_{1v} und a_E . Falls wir

$$\langle \psi_v(E') | \phi_1 \rangle = 0 \text{ und } \langle \phi_1 | H | \phi_1 \rangle = E_1 > 0$$

beachten, ist dieses

System einfach lösbar. Die erste Gleichung berücksichtigt die Orthogonalität zwischen den Streuzuständen und den gebundenen Zuständen, die zweite bringt eine Energiekorrektur durch die Restwechselwirkung. Das Matrixelement $\langle \psi_v(E') | H | \phi_1 \rangle \neq 0$ berücksichtigt die Ankopplung der gebundenen Zweiteilchen-Zustände an das Zweiteilchen-Kontinuum. Da im allgemeinen Zwei- und Dreiteilchen-Kanäle gleichzeitig offen sind, besteht die allgemeinere Wellenfunktion aus einer Superposition von Wellenfunktionen des Typs

$$\Psi(E) = \Psi_c(E) + \Psi_v(E) \quad (129)$$

Die Stärke dieser Methode liegt darin, ohne künstliche Annahmen, wie beispielsweise Kanalradien und Randbedingungen an diesen, auszukommen. Sie wird geeignet sein für einzelne isolierte Resonanzen, weil in diesem Fall in der Summe von Gl.(126) nur ein Glied zu berücksichtigen ist. Mit dem Resultat aus Anhang A2 ist leicht zu sehen, daß ebenso das Dreiteilchen-Kontinuum etc. behandelt werden kann.

III Konvergenzverhalten des energiekorrelierten Schalenmodells

Zur Interpretation experimenteller Dreikörperzerfälle und zur Vorhersage bestimmter Wirkungsquerschnitte spielt die Konvergenz des Verfahrens eine entscheidende Rolle. Erwünscht ist, daß die Entwicklungen rasch konvergieren. Besondere Aufmerksamkeit verdient

- (i) die Entwicklung nach unkorrelierten Schalenmodell-Wellenfunktionen,
- (ii) der Bereichswechsel der dynamischen Variablen und
- (iii) die R-Matrix selbst.

Der letzte Punkt ist der unkritischste, weil er mit verhältnismäßig geringem Aufwand überwunden werden kann. Das Konvergenzverhalten der R-Matrix ist abhängig von der Anzahl der berücksichtigten Niveaus pro Kanal in einem bestimmten Energiebereich [15]. Die Berechnung der S-Matrix über die R-Matrix-Technik ist prinzipiell auf wenige Prozent genau bestimmbar. Die ersten beiden Punkte werden in den folgenden Abschnitten an einem Beispiel näher untersucht.

3.1 Kernmodell für die doppelte Nukleonenemission

Im Niederenergiebereich wird die doppelte Nukleonenemission besonders durch eine Deuteron-Reaktion begünstigt, weil durch den Einbau zweier Nukleonen in den Kern etwa 14 MeV gewonnen werden. Dieser Energie steht die geringe Bindungsenergie des Deuterons von etwa $2,224 \text{ MeV}$ gegenüber. Es genügen deshalb schon einige MeV Einschußenergie, um die Reaktions-Schwelle für die verschiedenen von Deuteronen induzierten Reaktionen zu überwinden. Die durch Deuteronen hervorgerufenen Reaktionen sind deshalb vielfältig und ihre Besonderheiten hängen von der Einschußenergie, der Ladung des Targets, einer eventuellen Polarisierung des Deuteron-Strahles usw. ab. Für das relativ lose gebundene Clusterteilchen kann dieses zum Aufbruch, reiner Ablenkung oder zur Bildung eines Compoundkerns führen. Der Aufbruch ist damit verbunden, daß eines der Deuteron-Nukleonen in den Kern eindringt, während das andere mehr oder weniger ungehindert am Kern vorbeifliegt. Zu einem Aufbruch wird es stets dann kommen, wenn die Coulombkraft, die am Proton des Deuterons angreift, die Bindungsenergie überwinden kann. Aus der Bedingung $\frac{1}{2} K |\kappa_p - \kappa_n| \geq |(BE)_d|$ erhalten wir eine einfache Abschätzung für die kritische Feldstärke

$$E \geq \frac{2 |(BE)_d|}{e |\kappa_p - \kappa_n|}$$

Am Kernrand einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius $R_0 = 1,12 A^{1/3}$ herrscht eine Feldstärke von

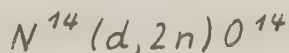
$$E = 11,5 \cdot 10^8 \frac{Z}{A^{2/3}} [\text{V cm}^{-1}]$$

Setzen wir beide Feldstärken gleich, so finden wir eine Bedingung für Dissoziation

$$\frac{Z}{A^{2/3}} \geq 1 \quad (126)$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann sind Compoundkern-Reaktionen günstig. In diesem Falle kann das Deuteron in den Kern eindringen. Wird ein mittlerer Abstand zwischen Neutron und Proton im Deuteron mit 4 fm angenommen, dann ergibt sich

für ein N^{14} -Target etwa 0,83. Damit ist gesichert, daß keine Dissoziation des d -Teilchens eintritt. Für diesen Fall ist eine Behandlung im Rahmen der R-Matrix sinnvoll. Es sei hier angemerkt, daß selbst eine Anwendung der R-Matrix bei Stripping-Reaktionen erfolgreich von Rock und Goldfarb [13] durchgeführt wurde. Nach unserer Ansicht ist aber in diesem Fall eine Aufteilung des Konfigurationsraumes in drei Bereiche sinnvoller, da Stripping- und pick-up-Reaktionen sich im wesentlichen an der Kernoberfläche abspielen. Als dritten Bereich kann man deshalb nach Baz [14] die Oberflächenregion einführen, in dem die Kernkräfte auf Null absinken. Als konkretes Beispiel wählen wir die Reaktion



aus. Sinngemäß gelten die Überlegungen auch für $(d, 2p)$ -Reaktionen und ähnliche, oder Photo-Prozesse vom Typ $(\gamma, 2n)$ etc. Wir berechnen den differentiellen WQ für den niedrig liegenden kollektiven 0^+ -Zustand mit dem Isospin $T=0$. Das Compoundsystem O^{16} besetzen wir mit Löchern in der p -Schale und lassen Teilchenanregungen in die (sd) -Schale zu. Für die $(2p2h)$ -Konfigurationen ergeben sich mit den folgenden Basiszuständen 14 Kanäle zum Compoundsystem $J^\pi=0^+$. λ steht für die radialen Einteilchen-Quantenzahlen.

$$\begin{aligned}
 & (1p_{1/2})^{-2} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{3/2})^{-2} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{1/2})^{-1} (1p_{3/2})^{-1} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{1/2})^{-2} (\lambda_1 d_{3/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{3/2})^{-2} (\lambda_1 d_{3/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{1/2})^{-1} (1p_{3/2})^{-1} (\lambda_1 d_{3/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{1/2})^{-2} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{5/2})^1 \\
 & (1p_{3/2})^{-2} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{5/2})^1 \\
 & (1p_{1/2})^{-1} (1p_{3/2})^{-1} (\lambda_1 d_{5/2})^1 (\lambda_2 d_{5/2})^1 \\
 & (1p_{1/2})^{-2} (\lambda_1 s_{1/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{3/2})^{-2} (\lambda_1 s_{1/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{1/2})^{-1} (1p_{3/2})^{-1} (\lambda_1 s_{1/2})^1 (\lambda_2 d_{3/2})^1 \\
 & (1p_{3/2})^{-2} (\lambda_1 s_{1/2})^1 (\lambda_2 d_{5/2})^1 \\
 & (1p_{1/2})^{-1} (1p_{3/2})^{-1} (\lambda_1 s_{1/2})^1 (\lambda_2 d_{5/2})^1
 \end{aligned}
 \tag{127}$$

Für unsere Studie wählen wir folgendes Modell: Wir betrachten Korrelationen in der (sd) -Schale zwischen einem $d_{5/2}$ - und $d_{3/2}$ -Neutron. Dazu nehmen wir von der Basis (127) die ersten drei Zustände und beginnen mit dem niedrigsten Zustand im Zweiteilchen-Kontinuum (siehe Abb.16).

Den Radialanteil für die offenen sowie die geschlossenen Zweiteilchen-Kanäle berechnen wir aus der radialen Schrödinger-Gleichung

$$u''(r) + \frac{2m_{red}}{\hbar^2} \left\{ E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_{red}r^2} - V(r) \right\} u(r) = 0 \quad (128)$$

mit Saxon-Woods-Potential

$$V(r) = V_c \left\{ g(r) - \gamma \left(\frac{\hbar^2}{2mc} \right)^2 \cdot (\vec{l} \vec{\sigma}) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dg(r)}{dr} \right\} + V_{coul} \quad (129)$$

Für den Fall der Protonen-Kanäle, muß das Coulombpotential V_{coul} berücksichtigt werden. Mit einer homogenen Ladungsverteilung im Kern folgt

$$V_{coul} = \begin{cases} \frac{Ze^2}{2R_0} \left(3 - \left\{ \frac{r}{R_0} \right\}^2 \right) \\ \frac{Ze^2}{r} \end{cases} \text{ für } \begin{cases} r \leq R_0 \\ r \geq R_0 \end{cases} \quad (130)$$

R ist der Radius und Z die Ladung des Restkerns. m ist die Teilchenmasse und die Konstante γ gibt die Stärke der Spin-Bahn-Kraft an. Als Ladungsverteilung wird eine Fermi-Verteilung mit der Oberflächendicke t benutzt

$$g(r) = \left\{ 1 + \exp \left(\frac{r - R_0}{t} \right) \right\}^{-1}$$

Für das Compoundsystem O^{16} verwenden wir die folgenden Parameter:

$$R_0 = 3.15 \text{ fm}, \quad t = 0.65 \text{ fm}, \quad V_c = -50 \text{ MeV}, \quad \gamma = 35.0$$

Diese Wahl wird durch eine Analyse der Niederenergie-Daten aus der Neutronenstreuung nahegelegt [16]. Die Diskretisierung des Einteilchenkontinuums erfolgt nun dadurch, daß Gl. (128) für die positiven Energie-Kanäle unter Beachtung einer konstanten Randbedingung gelöst wird. Wir wählen als Anschlußradius $r = 12.0 \text{ fm}$ (naheliegende Wahl aus [4]) und als Randbedingung (willkürliche Wahl) $b = -0.5$. Das Energiespektrum für die geschlossenen Kanäle ist aus dem Experiment bekannt (siehe Abb.15). Die zugehörigen

Einteilchenspektrum

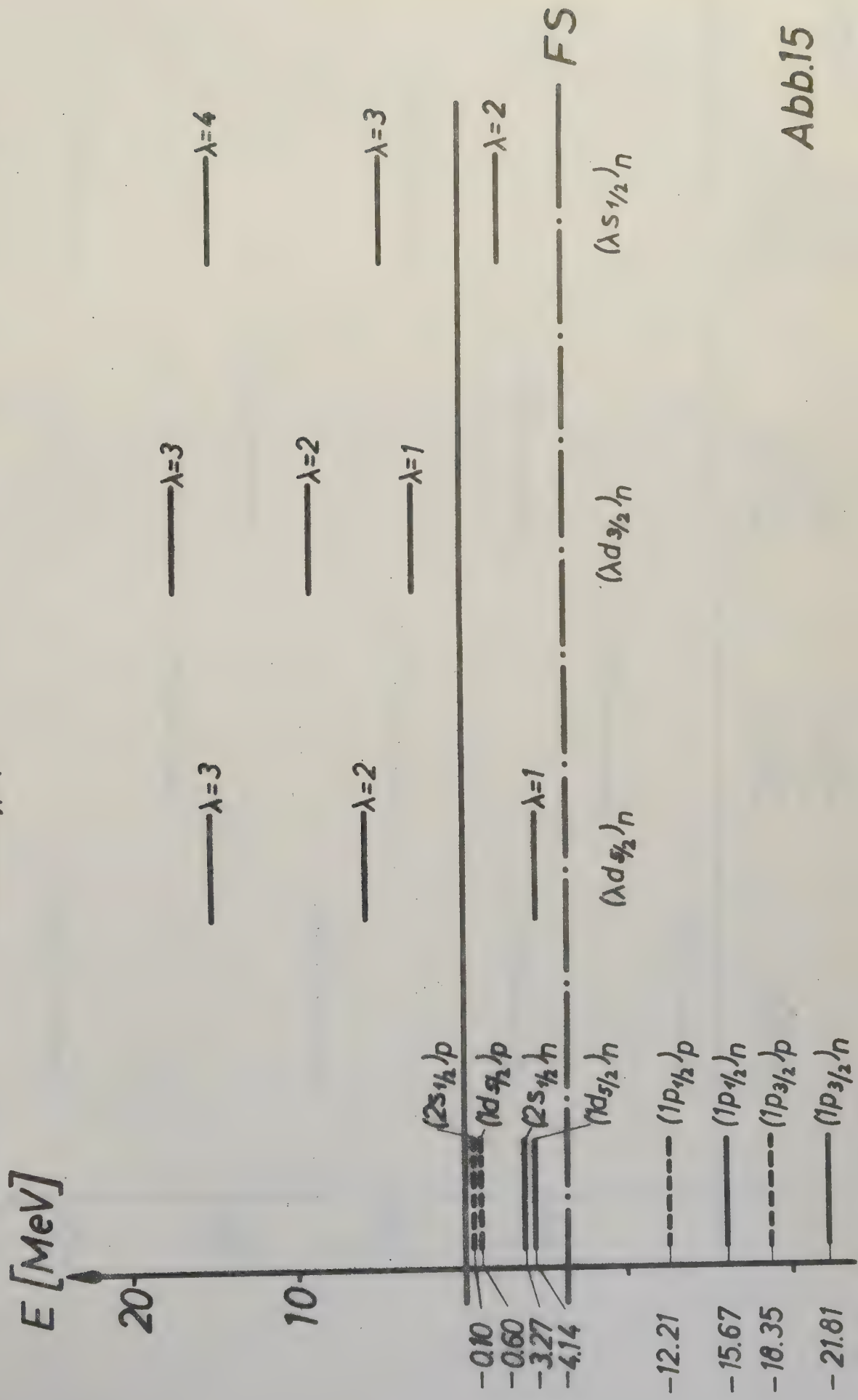
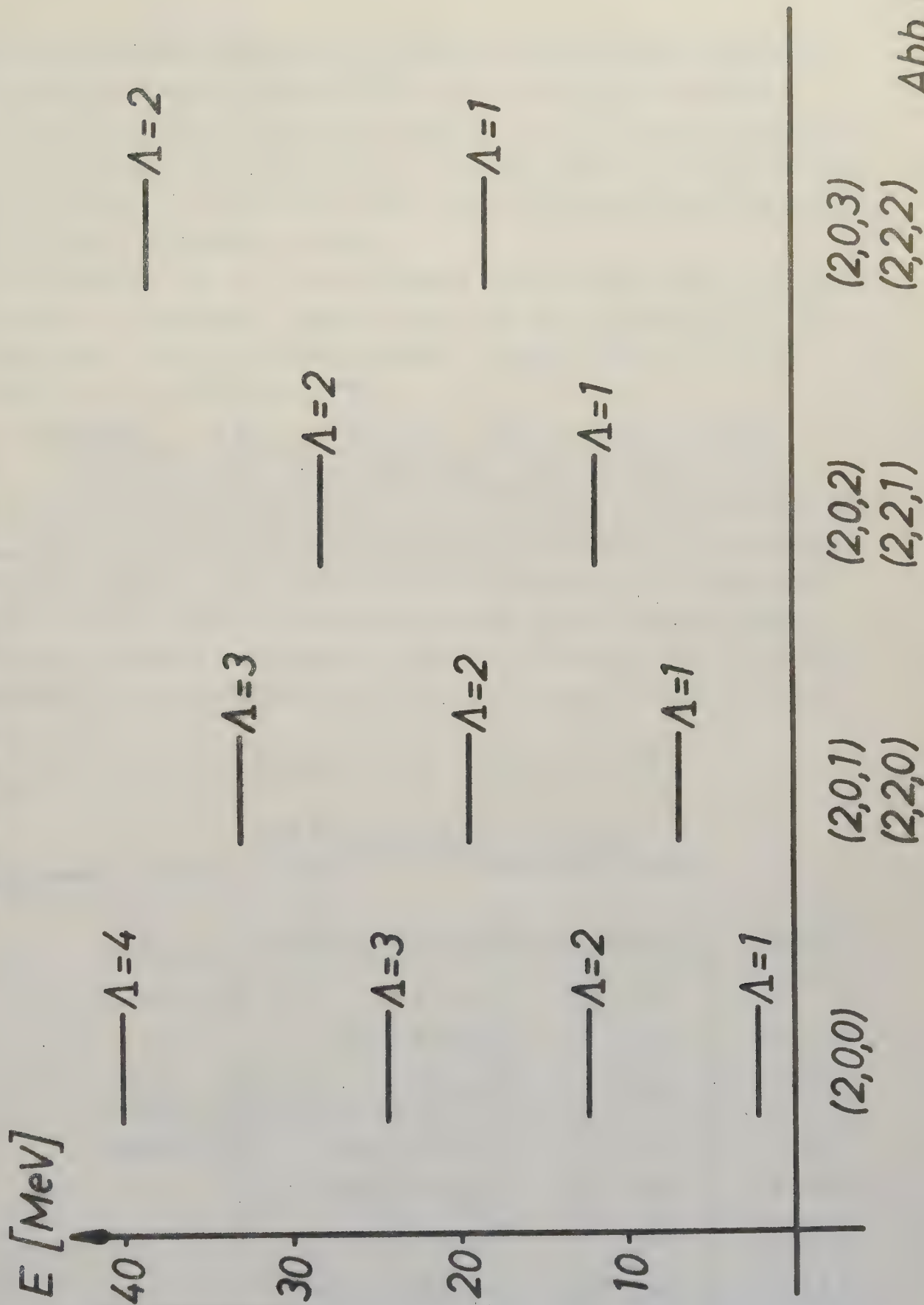


Abb.15

Zweiteilchen - Kontinuum



Wellenfunktionen bestimmen wir aus Gl.(128) mit der Forderung, daß sie am Ursprung endlich ^{sind} und für $r \rightarrow \infty$ nach Null streben.

Für das Zweiteilchen-Kontinuum wählen wir als Modellpotential einen Kasten der Größe $V_0 = 40 \text{ MeV}$, eine Reichweite von 3.2 fm und als Anschlußradius $r = 12 \text{ fm}$ (Abb. 16). Eine Variation aller Parameter soll später untersucht werden.

Die Schwellen für die verschiedenen Reaktionsprozesse mit drei Teilchen im Endkanal, ergeben sich aus den Grundzuständen der beteiligten Kerne und Nachbarkerne. Beispielsweise für zwei Neutronen aus dem $(1p_{1/2})$ -Niveau

$$\begin{aligned} -Q &= (E_{\text{Projektil}} + E_{\text{Target}}) - (E_{\text{Restkern}} + E_{\text{Ejektile}}) = E_{\text{rel } 0} - E_{\text{rel } I} \\ &= \{(2.224 + 104.661) - 98.711\} \text{ MeV} = 8.174 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Die Grundzustandsenergien E_{Target} und E_{Restkern} des Systems N^{14} und O^{14} sind der Tabelle von Wapstra [17] entnommen. Für zwei Neutronen aus der nächst tiefer liegenden O^{16} Compoundkern-Konfiguration der p -Schale, ist die Schwellenenergie um die entsprechende Differenzenergie zwischen den beiden Konfigurationen zu erhöhen (Abb. 17). Beispielsweise für die $(1p_{1/2})_n^{-1} (1p_{3/2})_n^{-1}$ Konfiguration

$$Q_{(1p_{1/2})_n^{-1} (1p_{3/2})_n^{-1}} = Q_{(1p_{1/2})_n^{-2}} + \Delta$$

mit

$$\Delta = E_{(1p_{1/2})_n^{-1} (1p_{3/2})_n^{-1}} - E_{(1p_{1/2})_n^{-2}}.$$

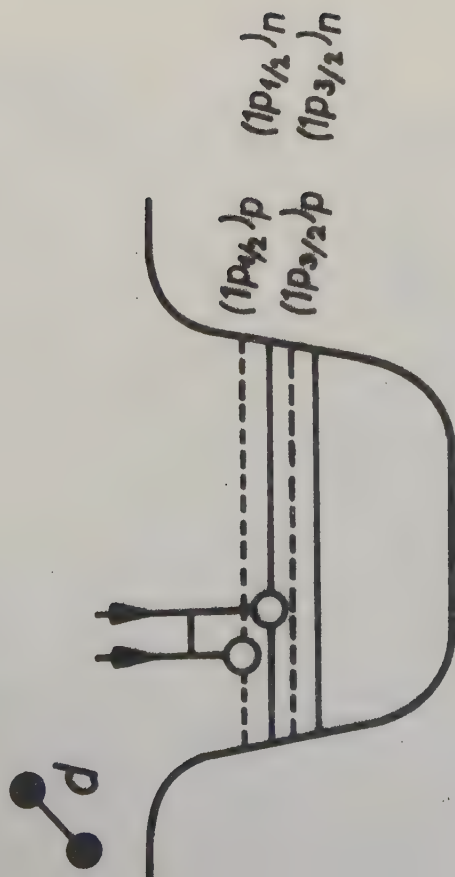
Insgesamt erhalten wir für die verschiedenen Kanäle

	Konfiguration des Restkerns	Ejektile	$-Q [\text{MeV}]$
Restkern O^{14}	$(1p_{1/2})_n^{-2}$	2n	8.174
	$(1p_{1/2})_n^{-1} (1p_{3/2})_n^{-1}$	2n	14.324
	$(1p_{3/2})_n^{-2}$	2n	20.474
Restkern N^{14}	$(1p_{1/2})_p^{-1} (1p_{1/2})_n^{-1}$	pn	2.224
	$(1p_{1/2})_p^{-1} (1p_{3/2})_n^{-1}$	pn	8.364
	$(1p_{3/2})_p^{-1} (1p_{1/2})_n^{-1}$	pn	8.364
	$(1p_{3/2})_p^{-1} (1p_{3/2})_n^{-1}$	pn	14.504
Restkern C^{14}	$(1p_{1/2})_p^{-2}$	2p	1.597
	$(1p_{1/2})_p^{-1} (1p_{3/2})_p^{-1}$	2p	7.737
	$(1p_{3/2})_p^{-2}$	2p	13.894

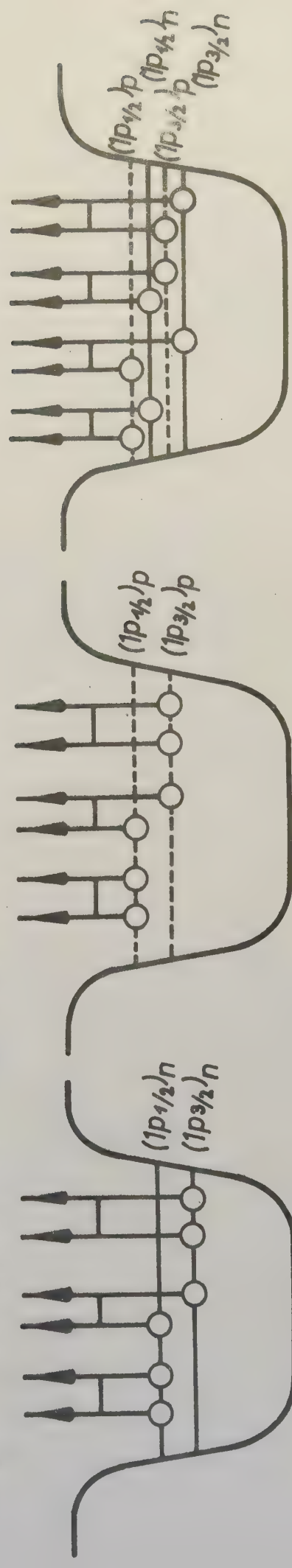
Mit der Anregungsenergie $E_d = E_{rel}$ folgt für die Relativbewegung im Ausgang

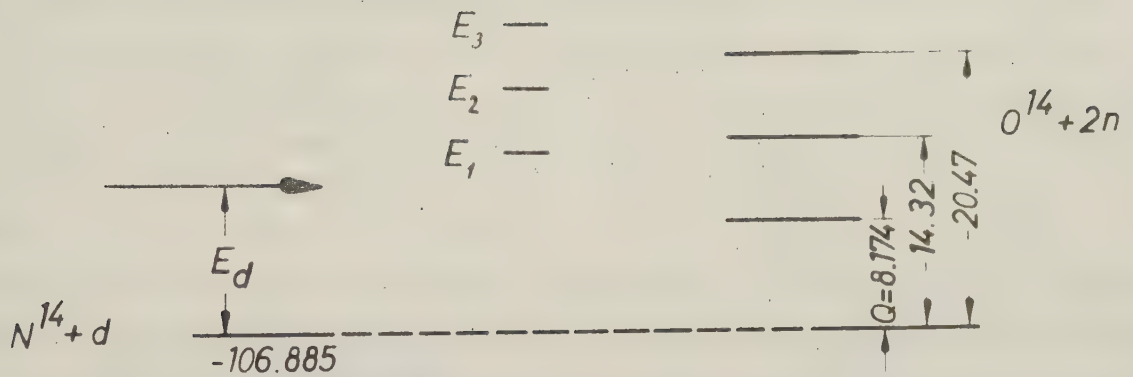
$$E_{rel0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = E_d - Q.$$

Eingang (eine Targetkonfiguration)



Ausgang (3 bzw. 4 Restkernkonfigurationen)





$$O^{16} \quad \overline{-127.615}$$

Abb. 18

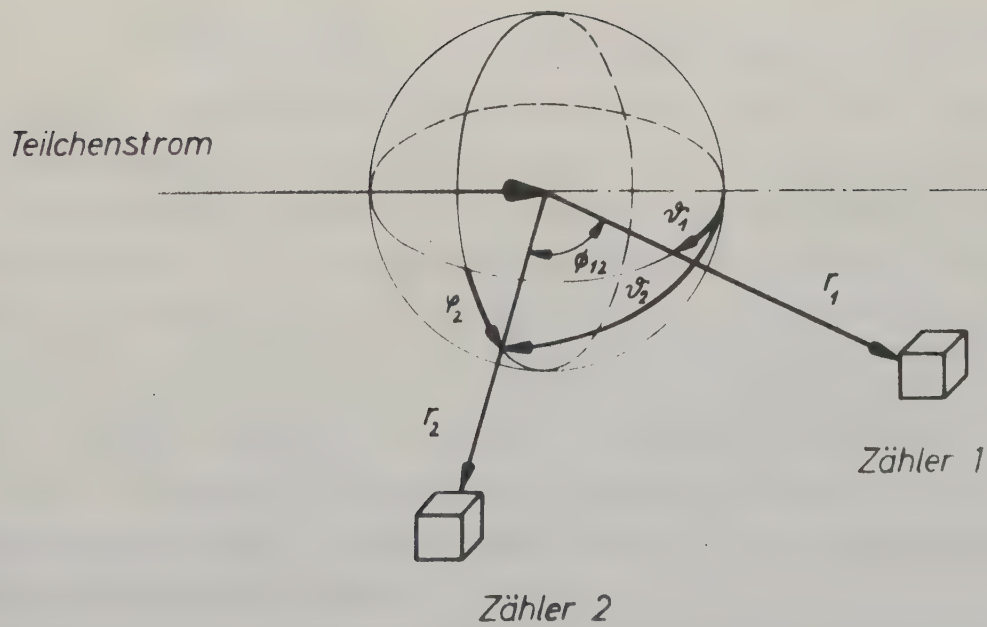


Abb. 19

3.2 Erste Resultate einer Phasenanalyse für eine $(d,2n)$ -Reaktion

Aus detaillierten Kernstruktur-Untersuchungen mit drei Teilchen im Ausgangskanal ergeben sich Informationen über den Reaktionsablauf, die Quantenzahlen der beteiligten Kerne und schließlich, über die Korrelationsfunktion, Hinweise auf korrelierte Teilchenpaare. Ein Dreiteilchen-Aufbruch ist vollständig durch eine Messung der Winkel- und Energie-Verteilung der Endfragmente bestimmt. Da eine geringe Anzahl von Partialwellen für die Phasenanalyse ausreichend ist, wird der Variablenbereich der kinematischen Größen eingeschränkt.

Unsere theoretischen Untersuchungen einer Dreikörper-Phasenanalyse führen wir an dem im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen 3-Kanal-Modell Abb. 17 mit einem Niveau im Zweiteilchen-Kontinuum durch (Abb. 16, Niveau $(2,2,0)$ mit $\Lambda=1$). Die Größe des verwendeten Einteilchenspektrums zeigt die Abb. 15 mit vier Schalenmodell-Niveaus aus der (sd) -Schale (λ steht für die radialen Quantenzahlen). Für die Korrelation zwischen einem $d_{5/2}$ - und einem $d_{3/2}$ -Neutron aus der (sd) -Schale erhalten wir gemäß Gl. (10.1) die in der Tabelle III stehenden Korrelationskoeffizienten. Berücksichtigen wir jeweils vier radiale Quantenzahlen, dann erreichen wir 77%, und bei Berücksichtigung von sieben bereits 80% der Vollständigkeit. Für den 2. und 3. Zustand im Zweiteilchen-Kontinuum erhalten wir 55% bzw. 56% und 51% bzw. 53%. Wir sehen hier, daß eine geringe Zahl von Zuständen den Hauptbeitrag zur Vollständigkeit liefert. Aus diesem Grund erscheint es zunächst gerechtfertigt, die Berechnungen auf vier radiale Quantenzahlen im Einteilchen-Kontinuum zu beschränken. Diese Beschränkung soll in zukünftigen Rechnungen aufgehoben werden. Ähnliche Resultate erhalten wir auch für höhere Zustände im Zweiteilchen-Kontinuum, wie Vorrechnungen zeigen. Weiterhin ist hier anzumerken, daß die Vollständigkeit für Teilchenpaare mit recht unterschiedlichen Konstituenten schlechter ausfällt, da nur Teilchenpaare mit gleichen Konstituenten maximal überlappen.

Die Abb. 18 zeigt schematisch die Position der Resonanzen über den entsprechenden Zweiteilchen-Schwellen nach dem Einteilchen-Modell aus Abschnitt 3.1. Zur eindeutigen Charakterisierung von zwei Richtungen sind insgesamt vier Winkel erforderlich, die wir

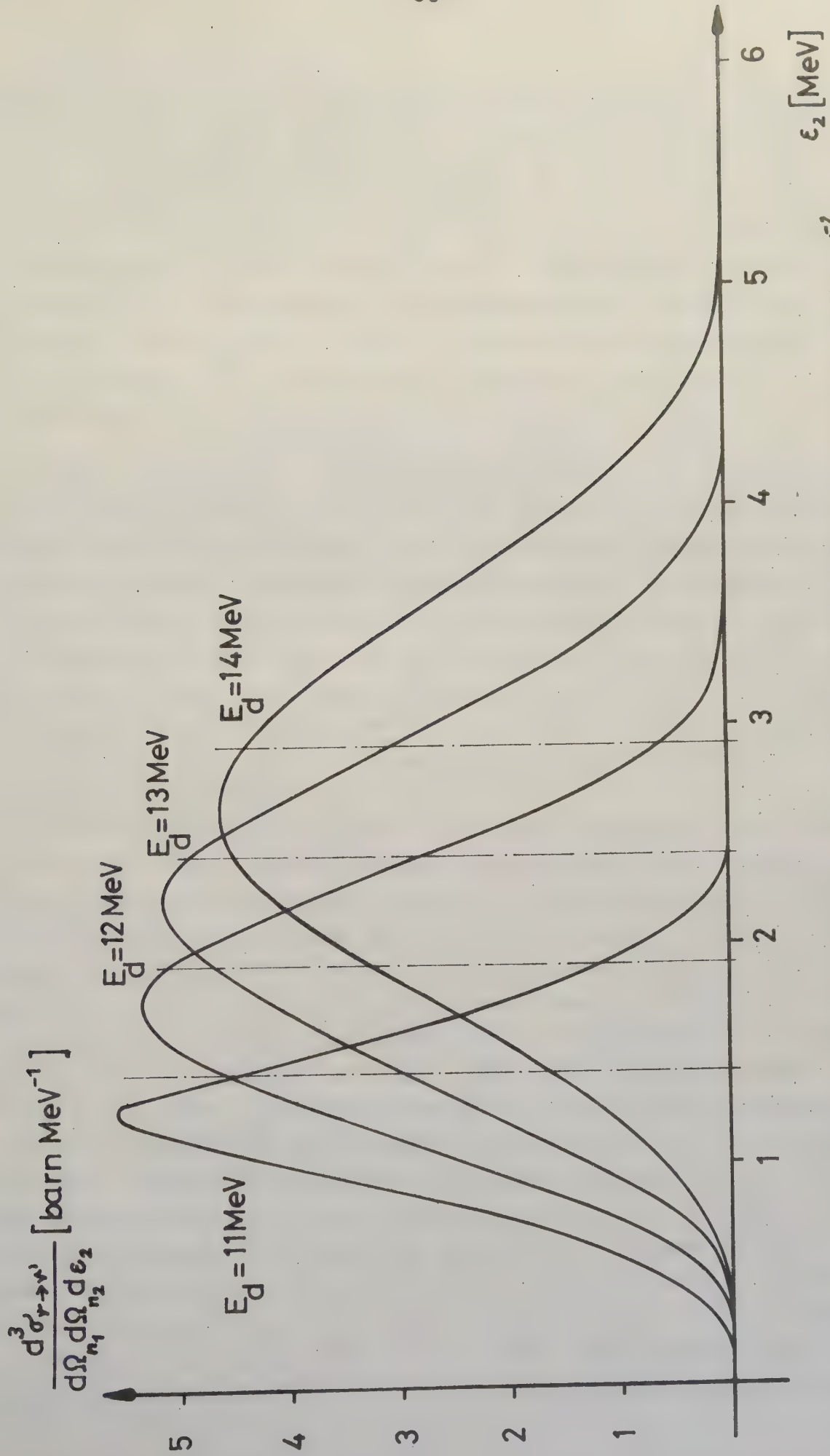


Abb. 20 WQ in Abhängigkeit von ϵ_2 für die Restkernkonfiguration $(1p_{1/2})^{-2}$

$$\psi_1 = \psi_2 = 60^\circ, \psi_2 = \phi_{12} = 90^\circ$$

gemäß der Abb.19 wie folgt gewählt haben: Die erste Emissionsrichtung liegt durch $\varphi_1=0^\circ$ (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) und ϑ_1 fest und die zweite durch φ_2 und ϑ_2 . Zur gegenseitigen Orientierung wählen wir den Zwischenwinkel ϕ_{12} . Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt über der ersten Zweiteilchen-Schwelle in Abhängigkeit von der Energie des 2. emittierten Neutrons erhalten wir für die doppelte Nukleonen-Emission (Anregungsenergie $E_d=11\text{ MeV}$ bis 14 MeV) die in Abb. 20 dargestellten symmetrischen Verteilungen. Die eingezeichnete, vertikale strichpunktierte Linie kennzeichnet die Stelle, an der die beiden Teilchen die gleiche Energie im Ausgangskanal haben. Als typisches Resultat erhalten wir eine Anisotropie in der Energieverteilung für die beiden Neutronen im Wirkungsquerschnitt. In allen vier Fällen liegt das Maximum stets beim gleichen Energieverhältnis $\varepsilon_2/\varepsilon_1=0.836$ und verschiebt sich mit wachsender Anregungsenergie. Gleichzeitig stellen wir eine Verbreiterung der Kurven und eine Abnahme des Wirkungsquerschnittes fest. Für die Emission zweier Neutronen aus den tiefer liegenden Compoundkern-Konfigurationen $(1p_{1/2})^{-1}(1p_{3/2})^{-1}$ und $(1p_{3/2})^{-2}$ erwarten wir, daß die Anisotropie in der Energie-Verteilung erhalten bleibt. Dieses bestätigen die Rechnungen, die in Abb.21 aufgetragen sind.

Ist eine Diskriminierung nach einer Teilchenenergie nicht möglich, dann integrieren wir über diesen Freiheitsgrad und erhalten mit einer isotropen Energieverteilung die Anregungsfunktion, die Abb.22 zeigt. Hier treten drei charakteristische Resonanzen auf, gemäß der Abb.18. Die Pfeile an der Abzisse kennzeichnen die Position, an der sich die Dreiteilchen-Kanäle öffnen. Alle Anregungsfunktionen für die verschiedenen Zwischenwinkel ϕ_{12} haben einen ähnlichen Verlauf mit zwei dicht aufeinanderfolgenden Maxima. Für einen Zwischenwinkel ϕ_{12} um 60° wird die Anregungsfunktion maximal ($\vartheta_1=\vartheta_2=60^\circ, \varphi_2=90^\circ$). Abb.23 zeigt für die Winkel $\vartheta_1=\vartheta_2=30^\circ$ die entgegengesetzte Situation, hier ist um $\phi_{12}=60^\circ$ der Wirkungsquerschnitt am kleinsten und steigt mit wachsendem bzw. abnehmendem Zwischenwinkel ϕ_{12} wieder an. Ferner ist der Wirkungsquerschnitt im gesamten Zwischenwinkelbereich um eine Zehnerpotenz kleiner. Wir halten letztlich fest, daß der Wirkungsquerschnitt in beiden Fällen eine starke Winkelabhängigkeit mit ausgeprägten Maxima über der ersten Zweiteilchen-Schwelle zeigt.

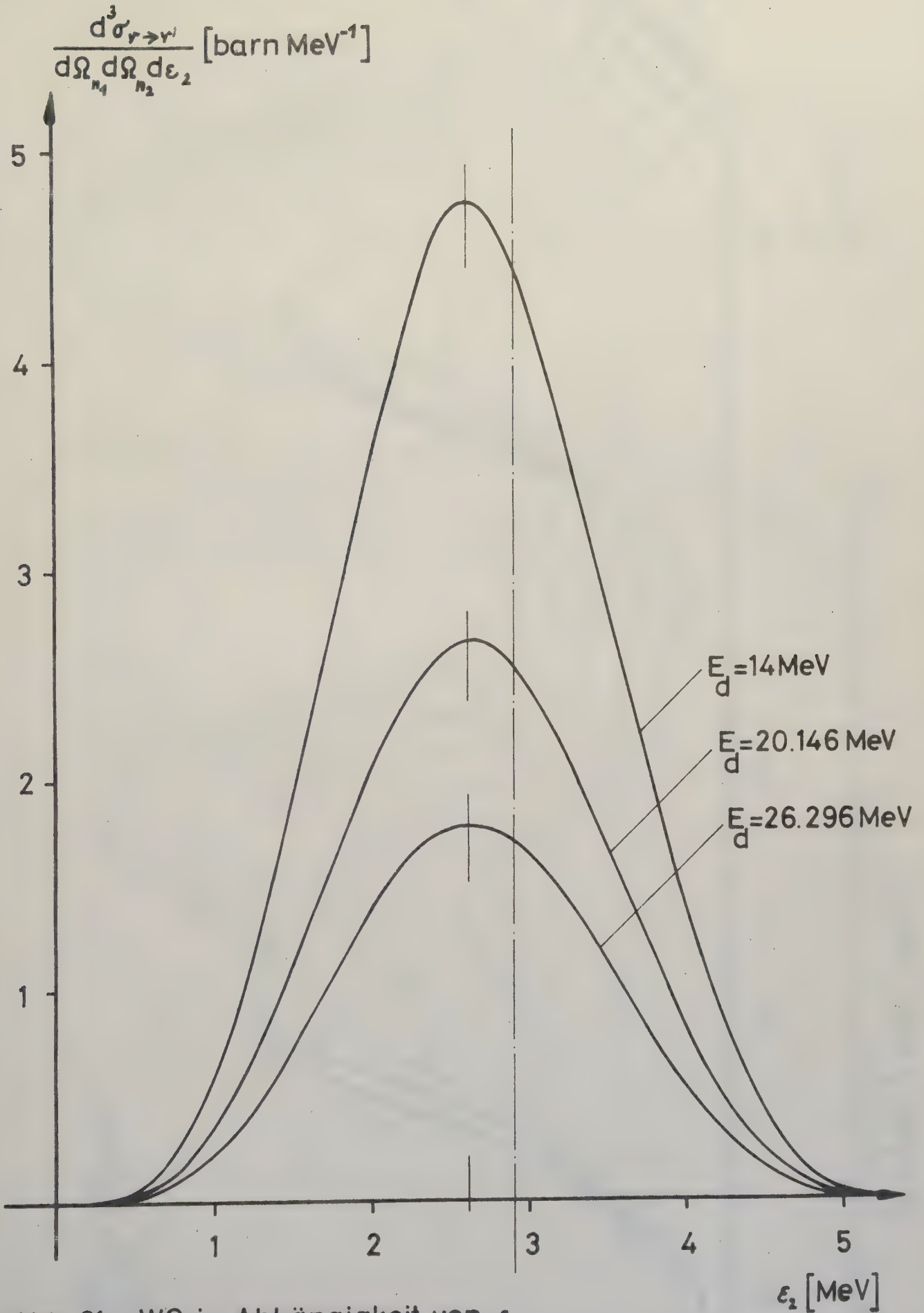


Abb. 21 WQ in Abhängigkeit von ϵ_2

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = 60^\circ, \quad \varphi_2 = \phi_{12} = 90^\circ$$

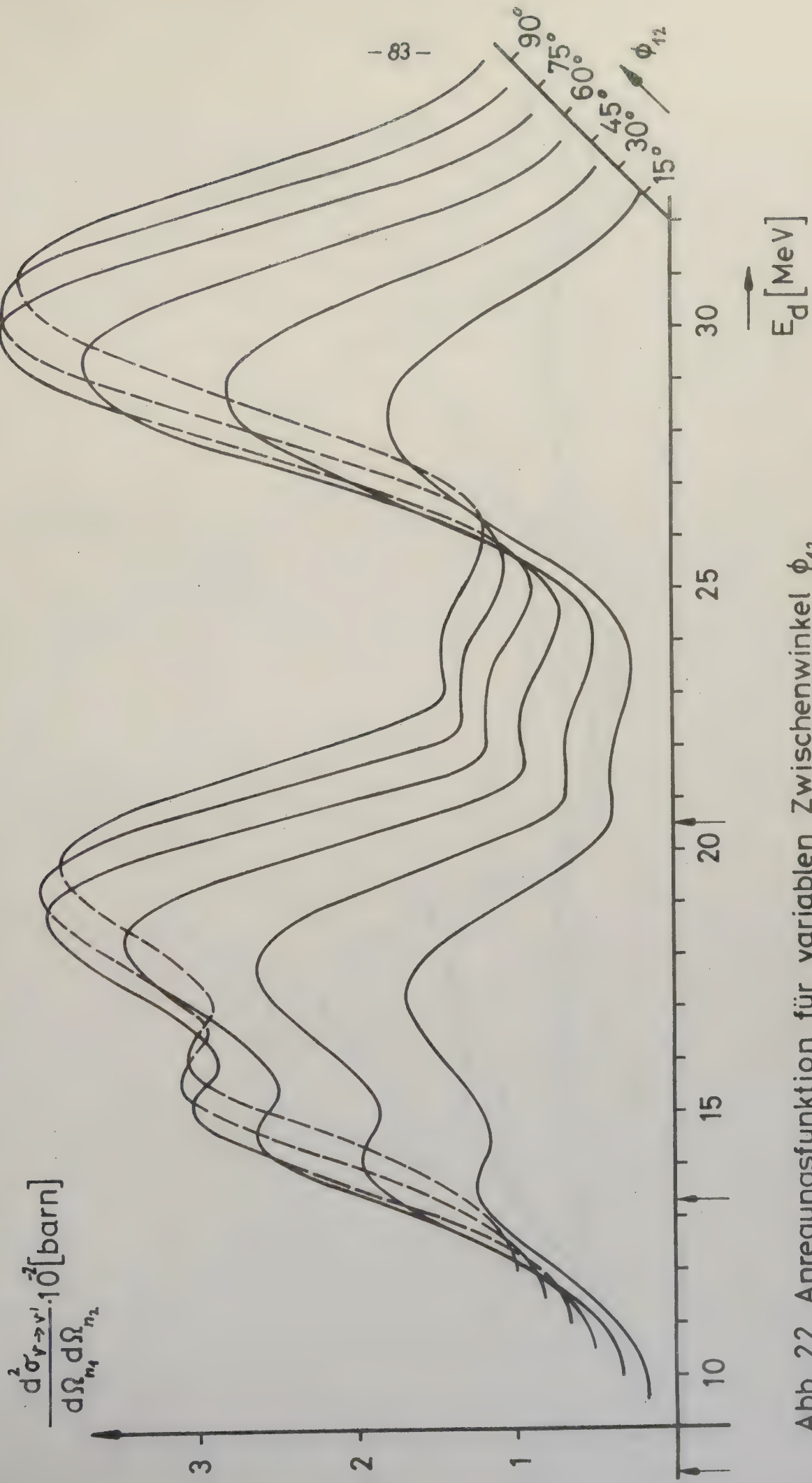


Abb. 22 Anregungsfunktion für variablen Zwischenwinkel ϕ_{12}
 $\psi_1 = \psi_2 = 60^\circ$, $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$

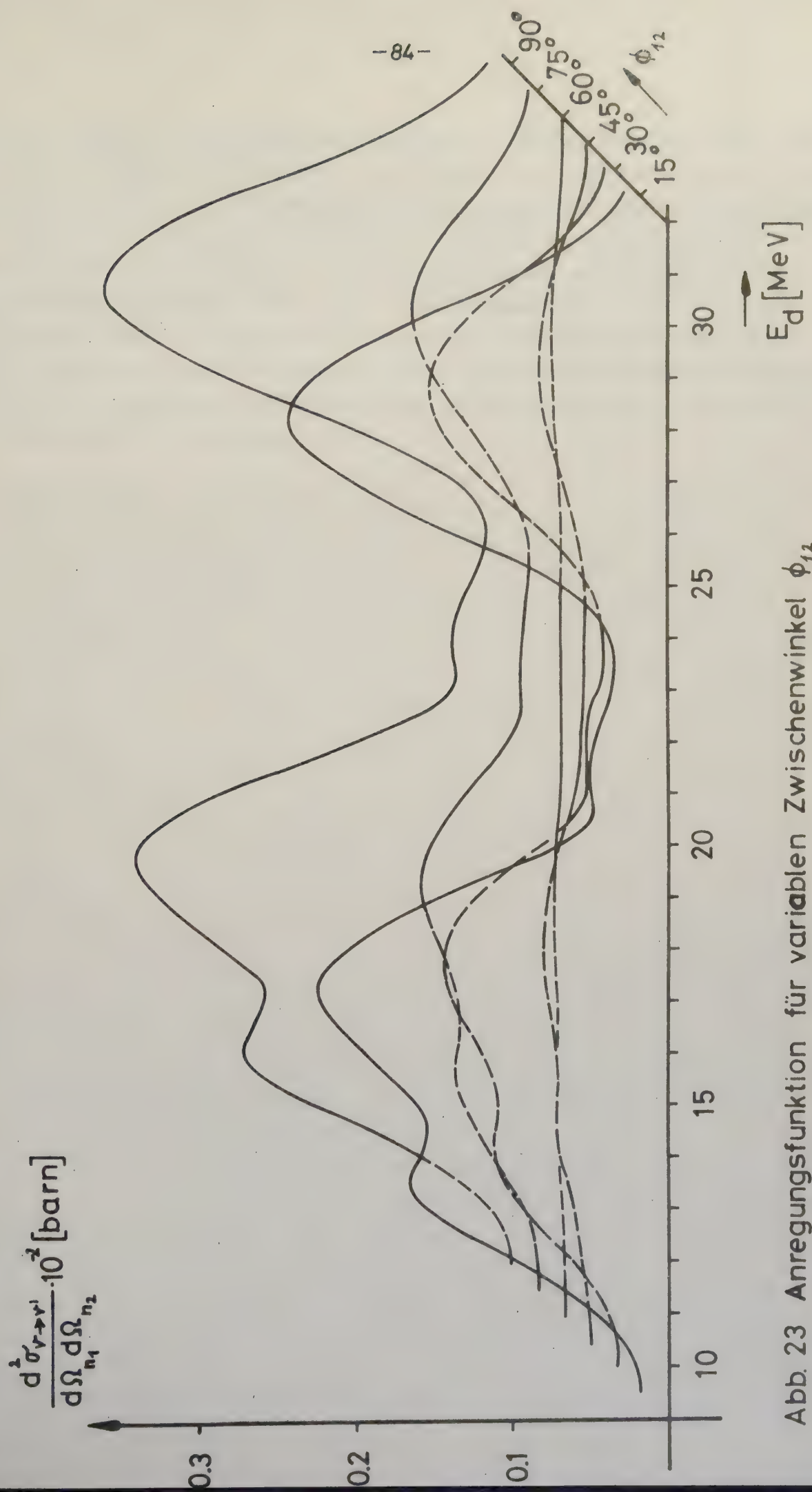


Abb. 23 Anregungsfunktion für variablen Zwischenwinkel ϕ_{12}
 $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 30^\circ$, $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$

Aus R-Matrix-Konvergenzuntersuchungen [15] ist bekannt, daß die niedrig liegenden Zustände den größten Beitrag zur vollen R-Matrix-Stärke liefern. In zukünftigen Rechnungen soll das Zweiteilchen-Kontinuum gemäß Abb.6 berücksichtigt werden. Für diesen Fall ist dann auch eine Variation der Kanalparameter, wie Randbedingung und Matching-Radius sowie der Potentialparameter vorgesehen. Durch dieses Konzept gelangen wir zu einem realistischen Modell, das uns gestattet, nähere Aussagen über die Kontinuums-Wechselwirkung von Teilchenpaaren und Feinheiten im differentiellen Wirkungsquerschnitt zu erklären.

IV Kritik des Modells und Ausblick

Allen Reaktionstheorien ist gemeinsam, daß sie über ein Modell den tatsächlichen Reaktionsablauf zu beschreiben suchen. Verwendet man eine formale Theorie zur Parametrisierung der S-Matrix, dann können wir verschiedene Arten von Randbedingungen wählen. In der R-Matrix-Darstellung (reelle Randbedingungen) sind die Parameter nicht explizit energieabhängig. Das System wird jedoch in einen "Kasten" eingesperrt. Mit wenigen R-Matrix-Zuständen ist der Übergang am Matching-Radius nicht stetig, außerdem ist er diskontinuierlich. Wie die Rechnungen von Petzold [15] zeigen, ist die Genauigkeit der R-Matrix abhängig von der Anzahl der berücksichtigten Niveaus in einem bestimmten Energiebereich, Drehimpuls des Teilchens und gewählter Randbedingung. Da die R-Matrix-Theorie ein mathematisches Verfahren ist, können die Randbedingungen für die offenen und geschlossenen Kanäle gleich gewählt werden. In der üblichen Schalenmodell-Beschreibung wird davon **nicht** Gebrauch gemacht, vielmehr werden die experimentellen Lochenergien benutzt, um die Reaktions-Schwellen richtig zu reproduzieren. Die zugehörigen Wellenfunktionen werden dann direkt der Schröd.-Gleichung entnommen. Als Nebenbedingung wird gefordert, daß sie für $r \rightarrow \infty$ verschwinden und für $r \rightarrow 0$ endlich bleiben. Durch dieses Konzept wird die Kanalorthogonalität verletzt. Ein offensichtlicher Vorteil einer R-Matrix-Behandlung gegenüber der EKT ist, daß man durch eine Diagonalisation die unitäre S-Matrix im gesamten Energiebereich erhält. In der EKT sind mehrere Diagonalisationen auszuführen, bis ein Eigenwert gefunden ist. Die Verwendung von unterschiedlichen Randbedingungen für die einzelnen Streuzustände führt zu einer schwachen Verletzung der Unitarität [4]. Die EKT ist deshalb vergleichbar mit der Einführung eines effektiven Kern-Hamiltonoperators für jeden Streuzustand.

Vermeidet man die Einführung von systemfremden Größen wie Kanalradien etc., dann kommt man zu einer Darstellung der S-Matrix durch Matrixelemente eines effektiven Hamiltonoperators, wie ihn beispielsweise Feshbach und andere [27] benutzen.

Bei allen Beschreibungen ist der Verletzung der Translationsinvarianz des Hamiltonoperators besondere Aufmerksamkeit zu schenken, weil durch ihre Verletzung die wohlbekannten spuriosen Zustände im Spektrum auftreten. Ein weiterer kritischer Punkt stellt der Rückstoßeffect [18] dar.

Für eine realistische Modell-Betrachtung, muß die gesamte Basis nach Abschnitt 3.1 für den O^+ -Zustand berücksichtigt werden. Durch Summation aller partiellen Wirkungsquerschnitte erhalten wir letztlich den totalen Wirkungsquerschnitt. In das Modell müssen weiterhin die (d,np) - und $(d,2p)$ -Kanäle eingeschlossen werden. Ferner sind in diesem Zusammenhang die (d,n) - und (d,p) -Kanäle von besonderem Interesse, weil ihr Einschluß einerseits zur vollen S-Matrix führt (Abb.9) und andererseits einen Vergleichstest der vorliegenden Schalenmodell-Theorie und der DWBA ermöglicht. Eine eventuell begleitende γ -Emission ist störungstheoretisch zu berücksichtigen. Als weiteres Anwendungsgebiet ist die doppelte Nukleonen-Emission durch γ -Anregung zu nennen. In diesem Fall bekommt das Target durch einfallende γ -Strahlung soviel Energie, daß die Zweiteilchen-Emissions-Schwelle überschritten wird (Abb.1). Im Rahmen dieser Theorie wäre es dann leicht abzuschätzen, welchen Beitrag die $(2p2h)$ -Anteile zur Dipolsumme liefern.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Schalenmodell-Theorie der Kernreaktionen für einen Dreikörperaufbruch formuliert und eine entsprechende Phasenanalyse durchgeführt. Das Verfahren ist nicht beschränkt auf das durchgerechnete Modell $(d,2n)$, sondern es ist auch anwendbar auf Reaktionen vom Typ $(N,2n)$, $(N,2p)$, (N,np) etc. und für die durch γ induzierte doppelte Nukleonen-Emission wie $(\gamma,2n)$ etc.

Für die Dreiteilchen-Kanäle wurde zunächst exakt die Schwerpunktsbewegung abgetrennt. Weiterhin wurde dargelegt, wie man die Randbedingungen zu formulieren und den Anschluß an die Außenraumlösungen zu vollziehen hat. Dabei haben wir gesehen, daß diese Schwierigkeit durch Einführung einer gemeinsamen Radialkoordinate überwunden werden kann. Der Schalenmodell-Hamiltonoperator H_0 wird dargestellt durch Operatoren $h_r(r,\alpha)$ mit einer Radialkoordinate r und einer Korrelations-Koordinate α . Damit liegt die Grundkonzeption einer Schalenmodell-Beschreibung der Kernreaktionen für zwei Teilchen im Kontinuum und $(A-2)$ Teilchen in gebundenen Bahnen fest. Zur Phasenanalyse eines Dreikörper-Aufbruchs ist es nun wichtig, die betreffenden S-Matrixelemente zu kennen. Die Berechnung dieser Elemente erfolgt über die R-Matrix, die Wigner und Eisenbud eingeführt haben [21], und hier auf Dreiteilchen-Reaktionen erweitert wurde. Besonders auffällig ist hier, daß die radialen Kanal-Wellenfunktionen durch eine $r^{-5/2}$ -Abhängigkeit gegenüber r^{-1} im Zweiteilchenfall gedämpft werden. Für die Bestimmung der Dreiteilchen-R-Matrix selbst, unterteilen wir den Konfigurationsraum in einen inneren und einen äußeren Bereich. Diese Aufteilung entspricht der physikalischen Vorstellung, daß von einem bestimmten Kanalradius an die Wechselwirkungen der Kontinuums-Teilchen untereinander und mit dem Target vernachlässigbar klein sind. Das Zweiteilchen-Kontinuum konstruieren wir durch Vorgabe einer festen Randbedingung (die willkürlich gewählt wurde) am Matching-Radius. Mit diesen korrelierten Eigenfunktionen ist eine geeignete Basis für die Behandlung des Zweiteilchen-Kontinuums gefunden, mit der

dann die Diagonalisation des Hamiltonoperators H vorgenommen wird. Hierbei gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten: Entweder man führt die Diagonalisation im (r, α) -Bereich aus, oder man entwickelt die Eigenfunktionen des Operators h_T nach einem Produkt unkorrelierter Eigenfunktionen des Einteilchen-Hamiltonoperators. Beide Methoden verfolgen dasselbe Ziel: über die Rest-Wechselwirkung eine Kopplung der Kontinuumszustände untereinander, eine Ankopplung der Kontinuumszustände an die gebundenen Zustände und letztlich eine Kopplung der gebundenen Zustände untereinander zu erreichen. Wegen Klarheit und der Übersicht halber, wurde die Diagonalisation im Modell unabhängiger Teilchenanregungen vorgenommen. Die Herleitung des Wirkungsquerschnittes erfolgte über die asymptotische Darstellung der Zweiteilchenfunktionen. Charakteristisch für den Wirkungsquerschnitt ist, außer seiner Winkelverteilung, die Energiekorrelation der auslaufenden Teilchen. Numerische Rechnungen wurden am Compoundsystem O^{16} für den O^+ -Zustand durchgeführt. Im einzelnen wurde eine Phasenanalyse für eine $N^{14}(d, 2n)O^{14}$ -Reaktion an einem 3-Kanal-Modell mit einem Zweiteilchen-Kontinuumszustand behandelt. Im Einteilchen-Kontinuum wurden vier Niveaus pro Einteilchenkanal berücksichtigt. In dem durchgerechneten Beispiel beschränkten wir uns auf $(2p2h)$ -Anregungen mit zwei Teilchen in der (sd) -Schale und zwei Löchern in der p -Schale. Die Energiekorrelationen in der (sd) -Schale, zwischen einem $d_{5/2}$ - und einem $d_{3/2}$ -Neutron, wurden explizit berücksichtigt. Als typisches Resultat dieses Modells stellen wir eine Anisotropie in der Energieverteilung zwischen den beiden auslaufenden Nukleonen fest, die wir dem kin. Faktor $\tilde{T}(E_d, \epsilon_2)$ zuschreiben. Eine Erweiterung auf eine größere Basis bietet prinzipiell keine Schwierigkeit und kann als "straight forward" angesehen werden. Ein wünschenswerter Vergleich der Theorie mit entsprechenden Experimenten ist nur beschränkt möglich. Als Novum halten wir letztlich fest, daß es damit erstmalig gelungen ist, eine Schalenmodell-Beschreibung der Kernreaktionen für zwei Teilchen im Kontinuum durchzuführen. Wünschenswert wären entsprechende Experimente, an denen die Leistungsfähigkeit der Theorie getestet werden kann.

Anhang

- A1 Separation der Schwerpunktsbewegung
- A2 Oszillator für zwei und mehr Teilchen
- A3 Das Hypersystem und seine Verallgemeinerung
- A4 Statistischer Faktor für eine $(d,2n)$ -Reaktion
- A5 Matrixelemente im $(2p2h)$ -Unterraum
- A6 Umkopplungskoeffizient

A1) Separation der Schwerpunktsbewegung

Im Abschnitt 1.1 haben wir die Transformationen für die Koordinaten in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten angegeben. Unsere Aufgabe ist es, hier mit Hilfe dieser Gleichungen die drei Laplace-Operatoren $\Delta_{x_{m_1}}, \Delta_{x_{m_2}}, \Delta_{x_{m_3}}$ umzurechnen. Für jede Laborkoordinate $x_{m_1}, y_{m_1}, \dots, z_{m_3}$ gibt es eine eindeutige Funktion von den beiden Relativkoordinaten und der Schwerpunktskoordinate in der folgenden Form

$$x_{m_1} = f(x_1, x_2, x_3)$$

Für die Ableitung nach dieser Koordinate folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_{m_1}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_{m_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_{m_1}} + \frac{\partial}{\partial x_{sp}} \cdot \frac{\partial x_{sp}}{\partial x_{m_1}} = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{sp}}$$

Entsprechende Ausdrücke erhalten wir für die Ableitungen nach x_{m_2} und x_{m_3} :

$$\frac{\partial}{\partial x_{m_2}} = -\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{sp}}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_{m_3}} = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{sp}}$$

Ebenso erhalten wir die zweiten Ableitungen, beispielsweise die Ableitung nach x_{m_1}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_{m_1}^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_{m_1}} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_{m_1}} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_{sp}^2} \left(\frac{\partial x_{sp}}{\partial x_{m_1}} \right)^2 + 2 \frac{\partial x_1}{\partial x_{m_1}} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_{m_1}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ &+ 2 \frac{\partial x_1}{\partial x_{m_1}} \cdot \frac{\partial x_{sp}}{\partial x_{m_1}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_{sp}} + 2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{m_1}} \cdot \frac{\partial x_{sp}}{\partial x_{m_1}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_{sp}} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_{sp}^2} - \frac{2m_1}{m_1+m_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2m_1}{m_1+m_2+m_3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_{sp}} \\ &- \frac{2m_1^2}{(m_1+m_2)(m_1+m_2+m_3)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_{sp}} \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen nach x_{m_2} und x_{m_3} , sowie diejenigen nach $y_{m_1}, y_{m_2}, y_{m_3}$ und $z_{m_1}, z_{m_2}, z_{m_3}$ ergeben sich analog. Damit ist es möglich, die drei Laplace-Operatoren auf die folgende Form zu bringen:

$$\frac{1}{m_1} \Delta_{\vec{r}_{m_1}} + \frac{1}{m_2} \Delta_{\vec{r}_{m_2}} + \frac{1}{m_3} \Delta_{\vec{r}_{m_3}} = \frac{1}{\mu_1} \Delta_1 + \frac{1}{\mu_2} \Delta_2 + \frac{1}{\mu_3} \Delta_3$$

Die neuen Massenfaktoren sind wie folgt definiert

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\mu_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{M},$$

$$\text{und } M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Damit schreibt sich die Schrödinger-Gleichung für das Dreikörper-Problem

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left\{ \frac{1}{\mu_1} \Delta_1 + \frac{1}{\mu_2} \Delta_2 + \frac{1}{M} \Delta_{s.p} - \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_{12} \right\} \Psi = E \Psi.$$

Mit einem Produktansatz für die Wellenfunktion in der Form

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{s.p.}) = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \varphi(\vec{r}_{s.p.})$$

und mit der Separationskonstanten ϵ , läßt sich dann leicht die Separation durchführen (siehe Gleichung 10).

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß stets eine einfache Separation der Schwerpunktsbewegung möglich ist, falls das Potential nur von der relativen Lage der Teilchen abhängt.

Ein Dreiteilchen-System reduziert sich auf ein Zweiteilchen-System mit den reduzierten Massen μ_1 und μ_2 . Die Verallgemeinerung auf ein n -Teilchensystem ist einfach, wir erhalten $n-1$ reduzierte Massen

$$\mu_{n-1} = \frac{m_n \sum_{i=1}^{n-1} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

und das n -Körperproblem reduziert sich auf ein $(n-1)$ -Problem.

A2) Oszillator für zwei und mehr Teilchen

In diesem Abschnitt wenden wir uns zunächst dem Energiespektrum und den Wellenfunktionen für zwei Teilchen in einem Parabelpotential zu. Später zeigen wir, daß die Methode auf n -Teilchen erweitert werden kann. Als Randbedingungen für die gebundenen Zustände fordern wir die Endlichkeit der Wellenfunktion am Ursprung und ihr Verschwinden für große Entfernungen r vom Ursprung. Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildet die Gleichung (266), die wir mit $R(r) = \varrho(r)/r^{\frac{1}{2}}$ in die folgende Form transformieren (siehe hierzu auch Gl. (57)).

$$\frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \left(\frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E + 2V_0 - \eta^2 r^2 \right\} - \frac{(l_1 + l_3 + 2n + 2)^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right) \varrho = 0 \quad (\text{A2.1})$$

Der konstante Term $\frac{2m}{\hbar^2} 2V_0$ und ein konstantes Wechselwirkungspotential bringen lediglich eine Energie-Verschiebung um einen konstanten Beitrag und sind deshalb für die augenblickliche Diskussion nicht von Bedeutung. Wir legen deshalb das Minimum der potentiellen Energie so, daß alle Energien für die gebundenen Zustände positiv ausfallen.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \left(E - \eta^2 r^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{(l_1 + l_3 + 2n + 2)^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right) \varrho = 0 \quad (\text{A2.2})$$

Für das asymptotische Verhalten ($r \rightarrow 0$) folgt

$$\frac{d^2 \varrho}{dr^2} - \frac{(l_1 + l_3 + 2n + 2)^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \varrho = 0 \quad \text{mit} \quad \varrho = \text{const.} \cdot r^{l_1 + l_3 + 2n + \frac{5}{2}}$$

und für $r \rightarrow \infty$

$$\frac{d^2 \varrho}{dr^2} - \frac{2m}{\hbar^2} \eta^2 r^2 \varrho = 0 \quad \text{mit} \quad \varrho = \text{const.} \cdot \exp \left\{ -\frac{\eta \sqrt{2m}}{2\hbar} r^2 \right\}$$

Mit der Abkürzung $\eta^2 = \frac{m}{2} \omega^2$ und den dimensionslosen Größen $\xi = \frac{r}{a}$, $\epsilon = \frac{E}{\hbar \omega}$ und $a = (\hbar/m\omega)^{\frac{1}{2}}$ erhalten wir die folgende Form aus Gl. (A2.2)

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 - \frac{(l_1 + l_3 + 2n + 2)^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} + 2\epsilon \right) \varrho(\xi) = 0 \quad (\text{A2.3})$$

Durch eine geschickte Umformung mit $x = \xi^2$ können wir diese Differentialgleichung direkt mit derjenigen für die konfluente hypergeometrische Funktion vergleichen [12]. Für das Energiespektrum erhalten wir

$$E_{N,l_1,l_3,n} = \hbar\omega(2N+l_1+l_3+2n+3) \text{ mit } N=l_1=l_3=n=0,1,\dots \quad (A2.4)$$

Die Gesamtwellenfunktion nimmt die folgende Gestalt an

$$\Phi(r,\alpha,\Omega_1,\Omega_2) = \phi(r) \cdot K(\alpha) \cdot W(\Omega_1,\Omega_2)$$

mit

$$\phi(r) = A_{N,l_1,l_3,n} \cdot \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right\} \cdot r^{l_1+l_3+2n} \cdot {}_1F_1\left(-N, l_1+l_3+2n+3, \frac{m\omega}{\hbar}r^2\right) \quad (A2.5)$$

l_1 und l_3 sind die Drehimpulse der beiden Teilchen. N ist die Oszillatorquantenzahl und n die Korrelationsquantenzahl. Aus Gleichung (A2.4) folgt: Die Energiewerte liegen äquidistant um $\hbar\omega$ verschoben, die Nullpunktsenergie hat sich um $\frac{3}{2}\hbar\omega$ für die zusätzlichen Freiheitsgrade erhöht. Der Entartungsgrad der Niveaus wird durch die Größe $\Theta = 2N+l_1+l_3+2n$ bestimmt. Die niedrigsten Energiewerte des Spektrums enthält die folgende Tabelle.

$\frac{E_{N,l_1,l_3,n}}{\hbar\omega}$	Θ	$(N+1)l_1,l_3,n$
3	0	1ss0
4	1	1sp0 1ps0
5	2	2ss0 1pp0 1ds0 1sd0 1ss1
6	3	2ps0 2sp0 0ps1 0sp1 0dp0 0pd0

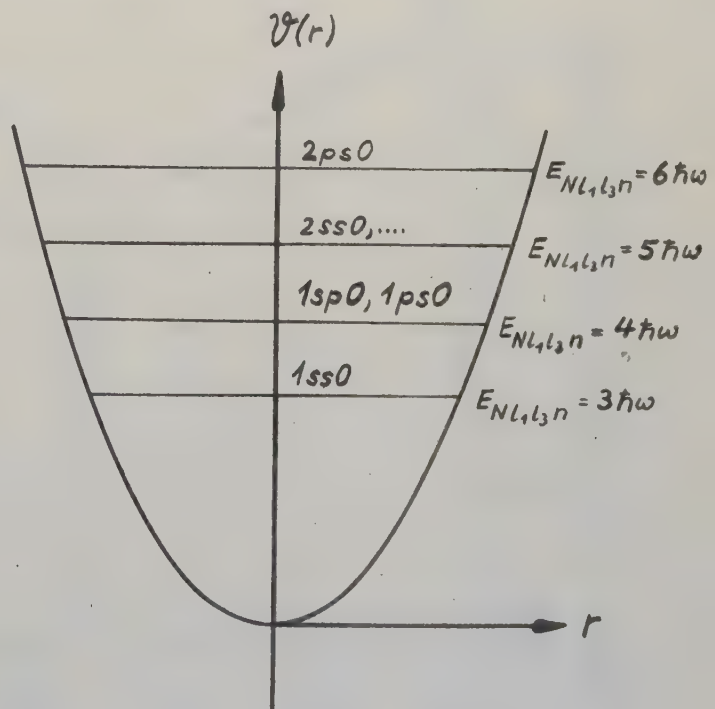


Abb. 24

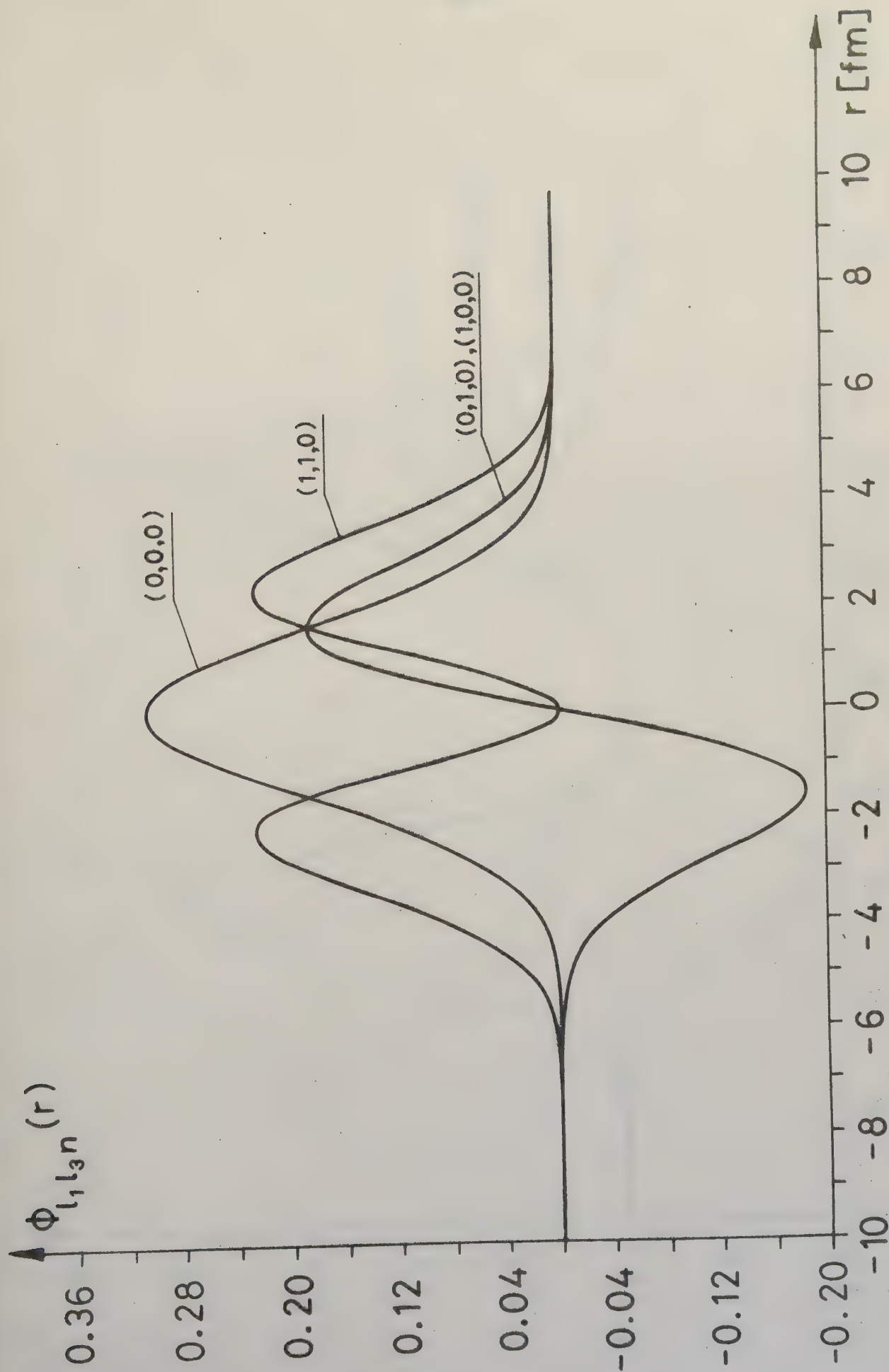


Abb. 25a Oszillatorfunktion für $N=0$

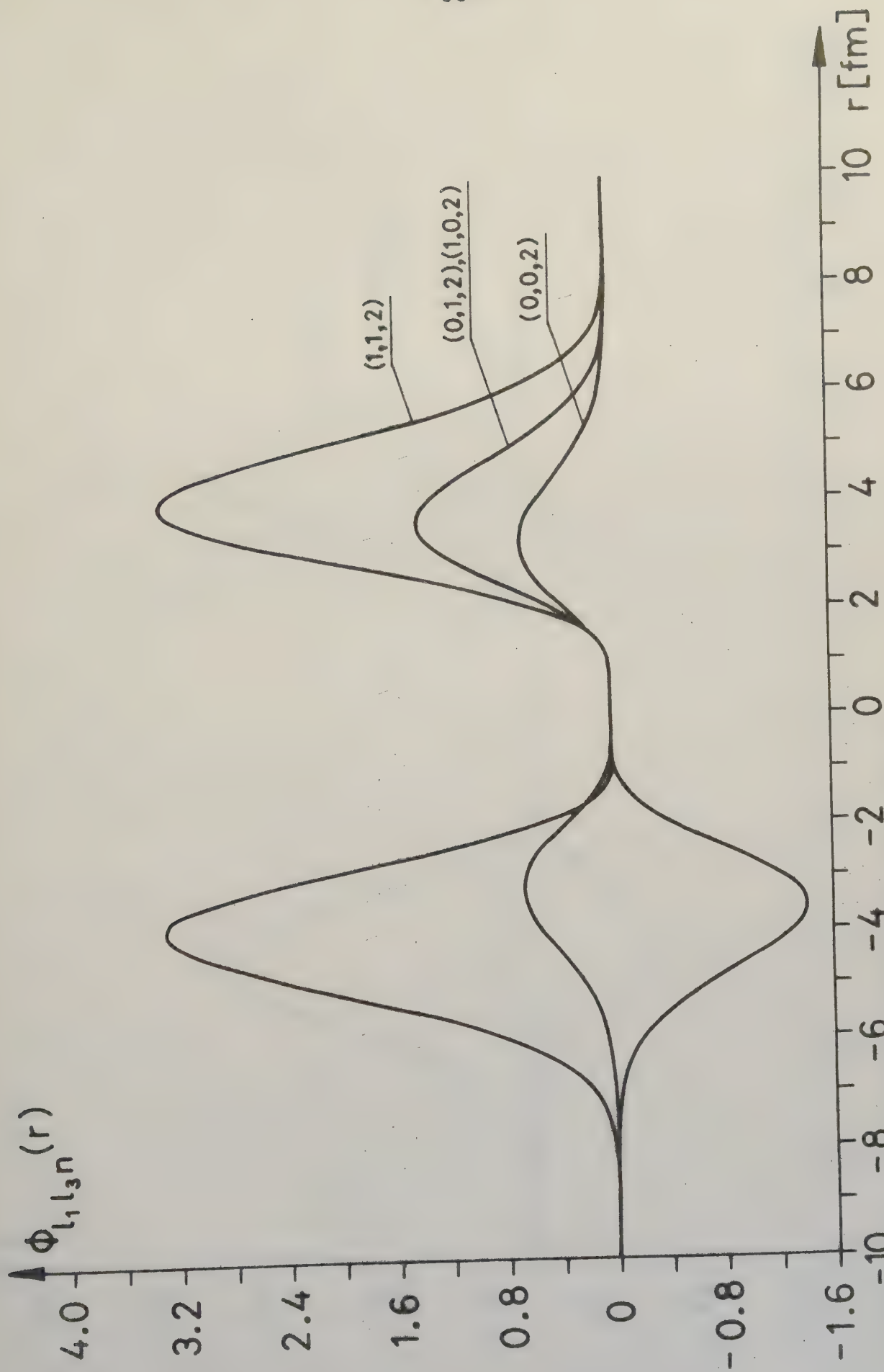


Abb. 25 b Oszillatorfunktion für $N=0$

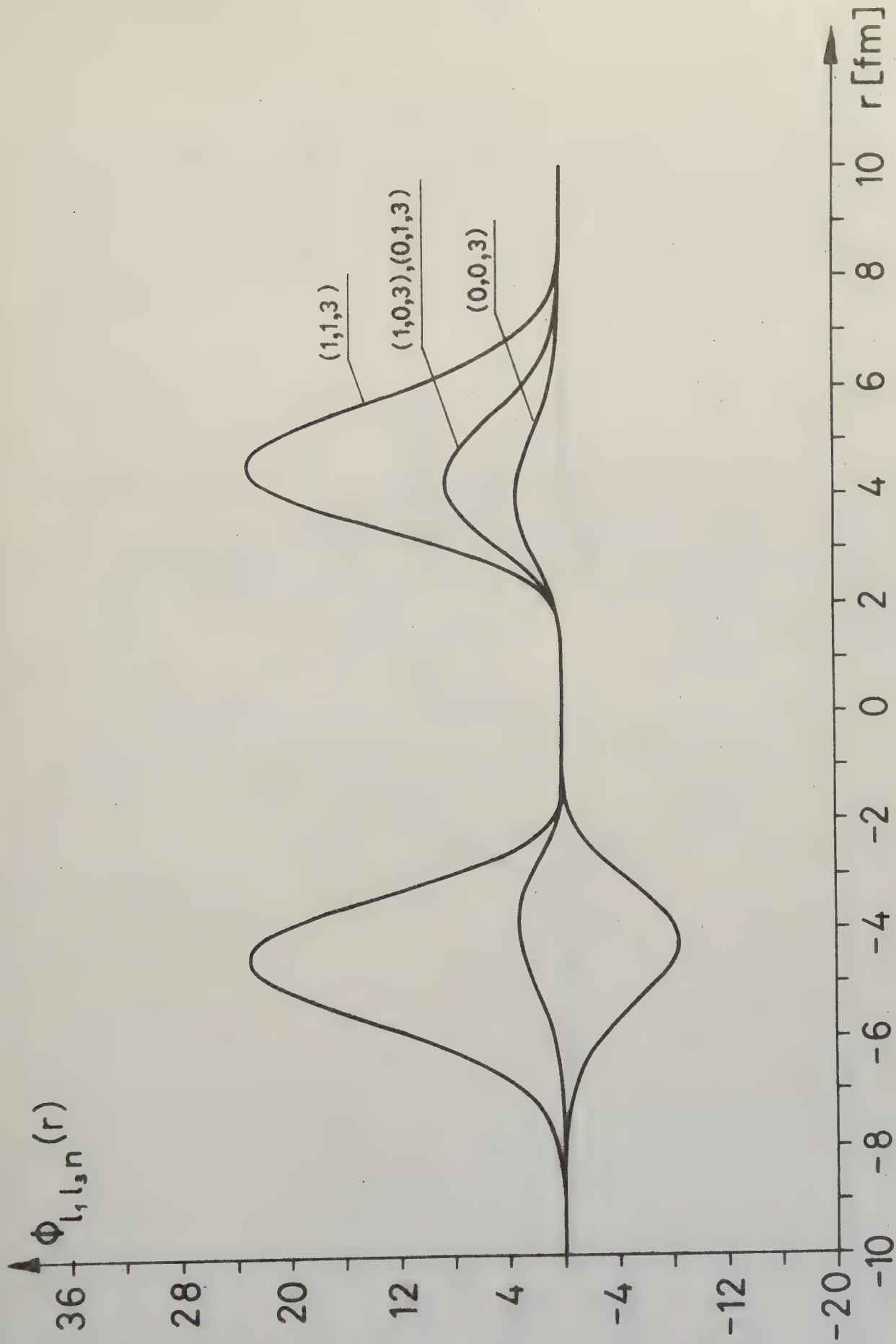


Abb.25c Oszillatorfunktion für $N=0$

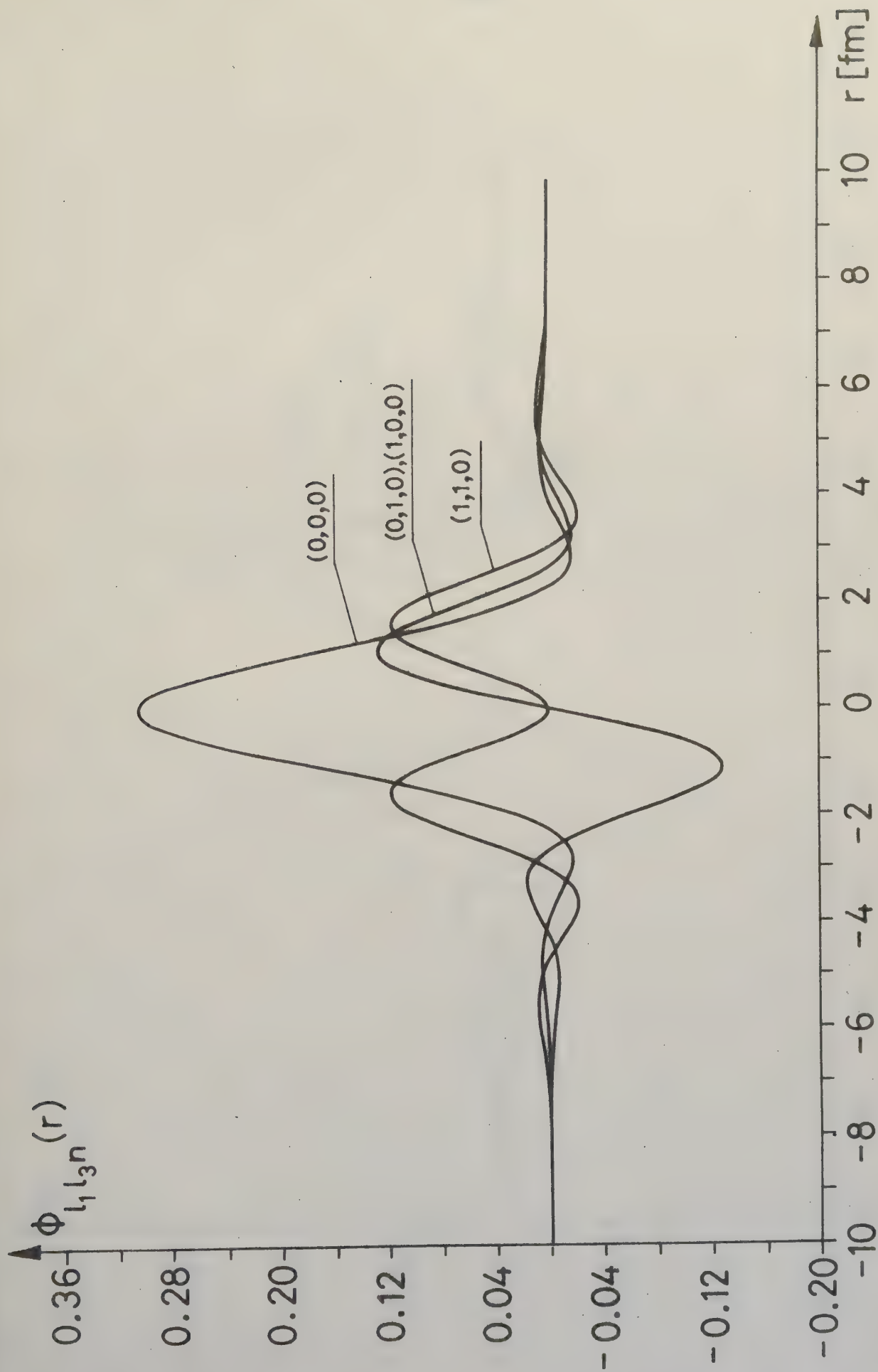


Abb. 25d Oszillatorfunktion für $N=2$

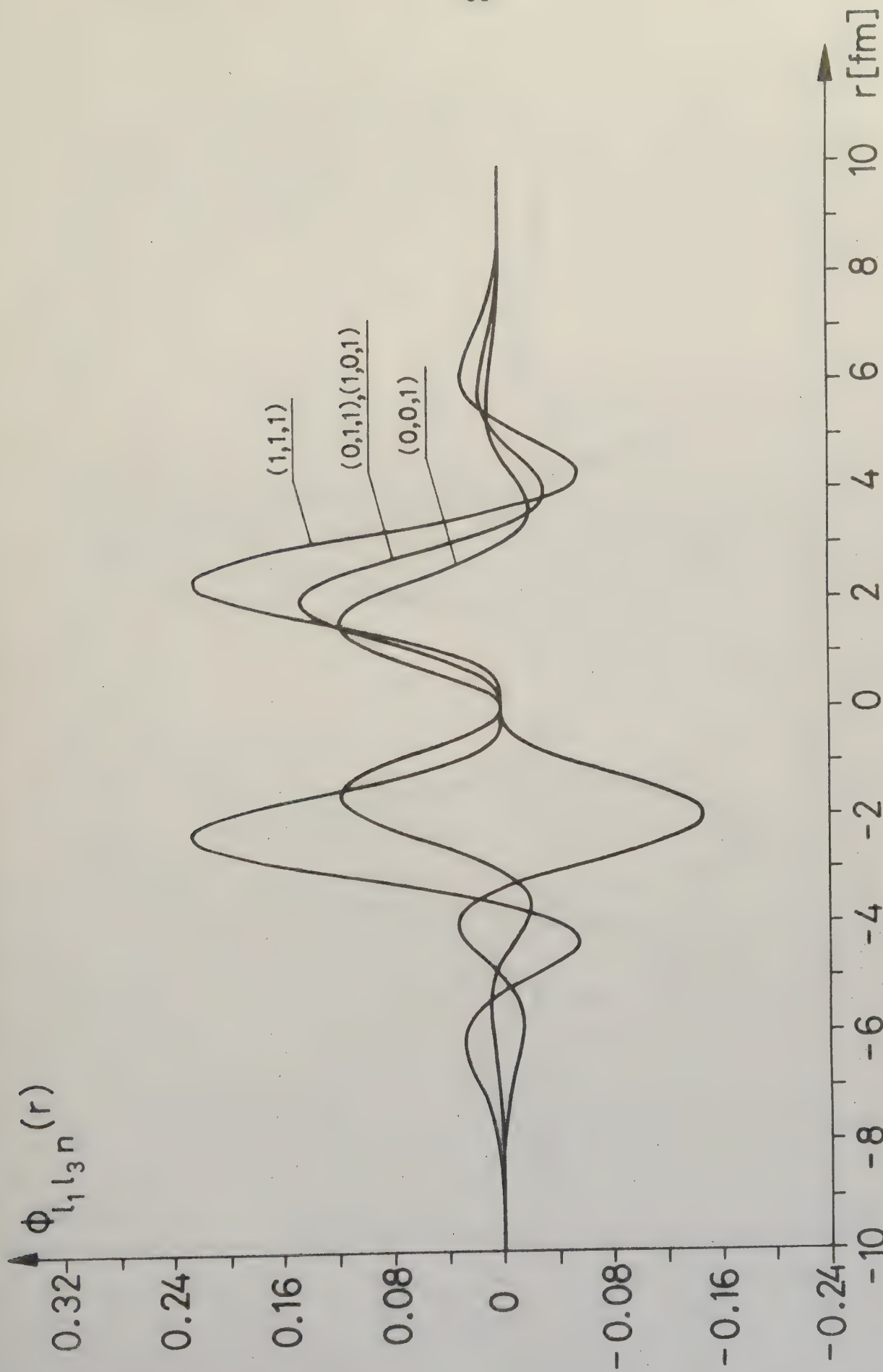


Abb. 25e Oszillatorfunktion für $N=2$

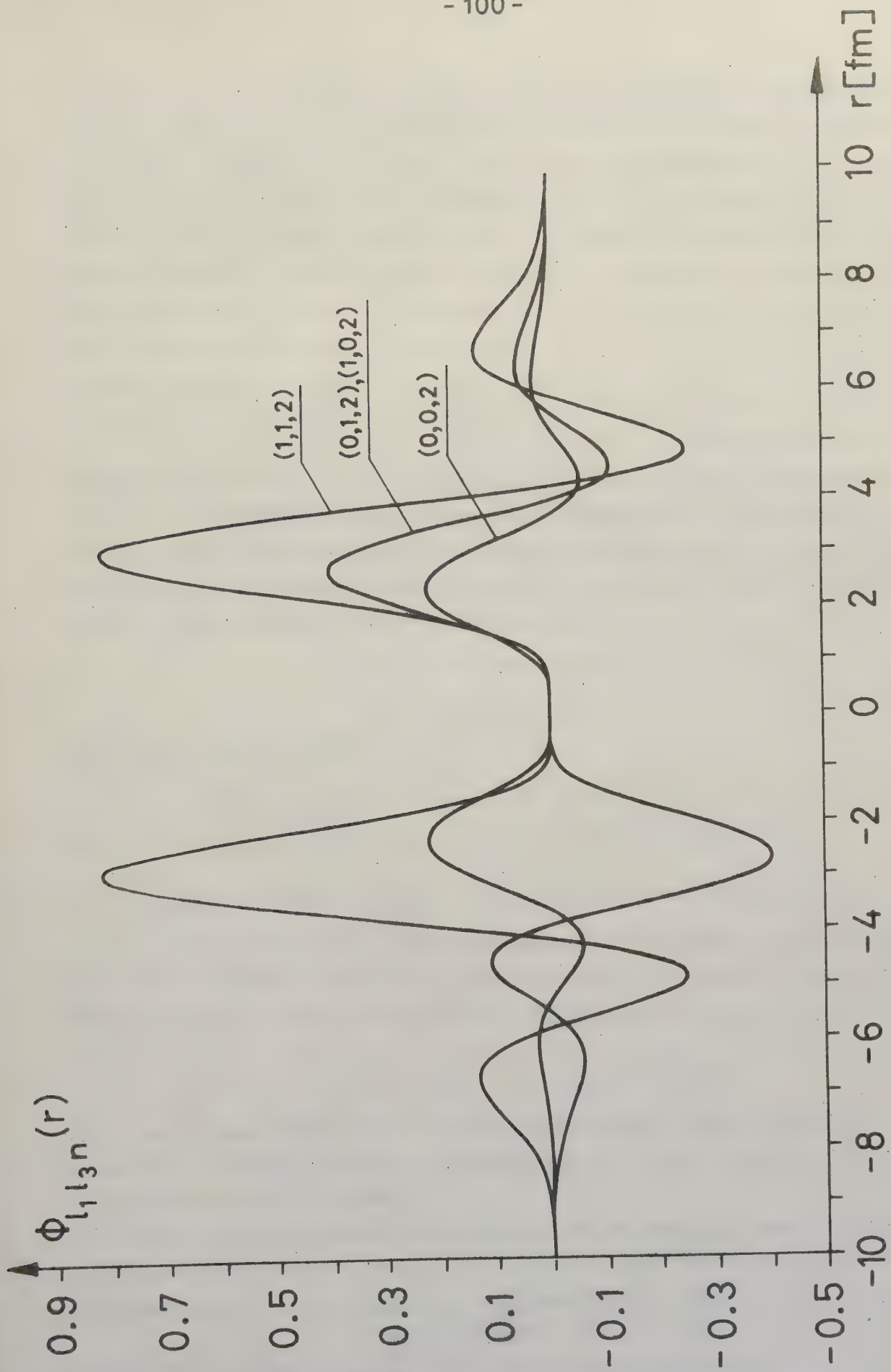


Abb. 25f Oszillatorfunktion für $N=2$

Fassen wir noch einmal zusammen: Das so gewonnene Schalenmodell ist ein korreliertes Schalenmodell mit äquidistanten Schalenabständen, abhängig von einem Satz von Quantenzahlen $\{N, l_1, l_2, n\}$. Hierbei sind die Relativabstände $\{r_1, r_2\}$ nicht unabhängig voneinander (siehe Gl. A3.6, A3.11 und A3.12), sondern durch den Korrelationswinkel $\alpha = \arctg r_2/r_1$ miteinander verknüpft. Weiterhin sehen wir, daß der Drehimpuls l_2 des 2. Teilchens und die Korrelationsquantenzahl n die Zentrifugalbarriere vergrößern, und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit näher an die klassische Grenze verlagert wird. Charakteristische Wellenfunktionen zeigen die Abbildungen 25. Auffällig an diesen Abbildungen ist, daß die beiden Teilchen noch eine gewisse Aufenthaltswahrscheinlichkeit für $r > R (= \frac{41}{\hbar\omega} r_0, r_0 = 1.12)$ besitzen. Dieses ist einfach zu erklären: Dazu betrachten wir zwei dreidimensionale Oszillatoren mit einem Potential vom Typ der Gleichung (21). Der Hamiltonoperator $h_1 = t_1 + v_1$ hängt nur von r_1 ab und h_2 nur von r_2 . Die Eigenwerte erhalten wir aus

$$\begin{aligned} h_1 |r_1; \nu\rangle &= \epsilon_\nu |r_1; \nu\rangle \\ h_2 |r_2; \mu\rangle &= \epsilon_\mu |r_2; \mu\rangle \end{aligned}$$

Eine Umformung liefert

$$(h_1 + h_2) |r_1; \nu\rangle |r_2; \mu\rangle = (\epsilon_\nu + \epsilon_\mu) |r_1; \nu\rangle |r_2; \mu\rangle.$$

Wie wir oben im Abschnitt 2.2 Gl. (95) gesehen haben gilt

$$h_\tau(r, \alpha) = h_1(r_1) + h_2(r_2) \quad \text{und} \quad h_\tau |r, \alpha; \Lambda\rangle = E_\Lambda |r, \alpha; \Lambda\rangle.$$

$E_\Lambda = \epsilon_\nu + \epsilon_\mu$ ist die Energie des korrelierten Systems, die Wellenfunktion $|\Lambda\rangle$ läßt sich darstellen als Produkt zweier Einteilchen-Funktionen mit Konstituenten aus den Niveaus ν und μ

$$|r, \alpha; \Lambda\rangle = \sum_{\nu, \mu} a_{\nu, \mu} |r_1; \nu\rangle |r_2; \mu\rangle.$$

Damit wird deutlich, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit außerhalb $r > R$ von höheren Komponenten $\{r, \mu\}$ der Einteilchen-Wellenfunktionen stammen.

Mit diesen Überlegungen ist es nun leicht, analog dem 6-dimensionalen Oszillator (siehe Gl. 24) für zwei Teilchen eine Verallgemeinerung auf n Teilchen durchzuführen ([31], [33]):

$$V(R) = \frac{m\omega^2}{2} R^2.$$

Hierbei ist R die gemeinsame Koordinate nach (A3.11).

A3 Das Hypersystem und seine Verallgemeinerung

Die Einteilchen-Koordinaten aus Gl. (17) enthalten Streckungs- bzw. Stauchungsfaktoren $\eta_1 = \left(\frac{m}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\eta_2 = \left(\frac{m}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}}$, je nachdem mit welcher Dynamik die Reaktion im Ausgangskanal verläuft

$$r_1 = \eta_1 r \cos \alpha \quad \text{und} \quad r_2 = \eta_2 r \sin \alpha \quad (\text{A3.1})$$

μ_1 und μ_2 sind die im Anhang A1 eingeführten reduzierten Massen, m ist die bewegte Masse im Dreiteilchen-Kanal $m = (\mu_1 \mu_2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Mit $a = \eta_1 r$ und $b = \eta_2 r$ erhalten wir für (A3.1) die Parameterdarstellung der Ellipse. Hieraus folgt ganz allgemein, daß der Definitionsbereich für die Koordinaten (r, α) nicht ein Viertelkreis ist. Als Berandung tritt ein Ellipsenviertel mit den Achsen a und b auf. Nehmen wir eine Fragmentierung in einer Form an, bei der ein Fragment mit der Masse m_2 wesentlich größer ist als die beiden anderen, dann ergibt sich

$$m = \left(\frac{m_1 m_3}{1 + \chi}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{m_1 + m_3}{m_2} \quad (\text{A3.2})$$

Für zwei auslaufende Nukleonen, ist somit die bewegte Masse im Dreiteilchen-Kanal $m = (m_1 m_3)^{\frac{1}{2}}$. Beispielsweise ist der Einfluß η_1 und η_2 auf zwei Nukleonen und einen Restkern von 14 Nukleonen $\eta_1 = 1.0011$ und $\eta_2 = 0.9989$. Dagegen ist der Einfluß stärker für ein System mit einem Nukleon und einem Clusterteilchen mit $m_3 = 2m_1$ bei gleicher Gesamtnukleonenzahl, hier ist $\eta_1 = 1.166$ und $\eta_2 = 0.8576$. Für den Fall eines Dreikörper-Aufbruchs mit zwei gleichen Fragmenten entartet die Ellipse zu einem Kreis.

Für das Volumenelement $dr = \sqrt{|det g_{ik}|} \cdot dq_1 \dots dq_i$ in den Koordinaten $\{r, \alpha, \vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2\}$, die wir kurz mit q_i bezeichnen, sind zunächst mit den kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= r \eta_1 \cos \alpha \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, \\ y_1 &= r \eta_1 \cos \alpha \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, \\ z_1 &= r \eta_1 \cos \alpha \cos \vartheta_1, \\ x_2 &= r \eta_2 \sin \alpha \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, \\ y_2 &= r \eta_2 \sin \alpha \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2, \\ z_2 &= r \eta_2 \sin \alpha \cos \vartheta_2. \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

die Tangentenvektoren σ_i

$$\sigma_i = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial z_3}{\partial q_i} \right) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad \text{zu bestimmen.}$$

Mit diesen Tangentenvektoren berechnen wir den metrischen Fundamentaltensor $g_{ik} = \sigma_i \sigma_k =$

$$\begin{pmatrix} \eta_1^2 \cos^2 \alpha + \eta_2^2 \sin^2 \alpha & r \sin \alpha \cos \alpha (\eta_2^2 - \eta_1^2) & 0 & \dots & 0 \\ r \sin \alpha \cos \alpha (\eta_2^2 - \eta_1^2) & r^2 (\eta_1^2 \sin^2 \alpha + \eta_2^2 \cos^2 \alpha) & & & \vdots \\ 0 & & r^2 \eta_1^2 \cos^2 \alpha & & \\ \vdots & & r^2 \eta_1^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \vartheta_1 & & \\ & & & r^2 \eta_2^2 \sin^2 \alpha & \\ 0 & \dots & & & r^2 \eta_2^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \vartheta_2 \end{pmatrix}$$

Durch Zusammenfassung (ohne die Vorfaktoren von A3.1) erhalten wir schließlich

$$\sqrt{|\det g_{ik}|} = r^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2$$

und für das Volumenelement

$$d\tau = r^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 dr d\alpha d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\varphi_1 d\varphi_2. \quad (\text{A3.4})$$

Das Volumen und die Oberfläche im 6-dimensionalen Raum berechnen sich zu

$$\tau = \int_0^R d\tau = \frac{\pi^3 R^6}{6} \quad \text{und} \quad \theta = \int_\theta d\theta = \pi^3 R^5. \quad (\text{A3.5})$$

Das Dreiteilchen-Problem, mit dem wir uns in dieser Arbeit beschäftigten, ist leicht auf ein Vierteilchen-Problem (Dreiteilchen-Kontinuum) usw. auszudehnen. Im Fall eines Vierteilchen-Problems haben wir drei Relativkoordinaten $\{r_1, r_2, r_3\}$ in ein Hypersystem $\{R, \alpha_1, \alpha_2\}$ zu transformieren. Hierbei ist

$$\begin{aligned} r_1 &= R \cos \alpha_2 \cos \alpha_1, & R^2 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \\ r_2 &= R \cos \alpha_2 \sin \alpha_1, & \text{mit } \alpha_1 &= \arctg \frac{r_3}{r_1}, \\ r_3 &= R \sin \alpha_2, & \alpha_2 &= \arctg \frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}. \end{aligned} \quad (\text{A3.6})$$

Die Dgl. für die Relativbewegung lautet im potentialfreien Fall oder für konstantes Potential

$$\frac{1}{R^8} \frac{d}{dR} \left(R^8 \frac{d}{dR} \right) + \left\{ k^2 - \frac{C_1}{R^2} \right\} \varphi(R) = 0 \quad (A3.7)$$

mit

$$C_1 = (l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + \frac{7}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2, \\ \varphi(R) = R^{-\frac{7}{2}} \left\{ a J_{l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + \frac{7}{2}}(kr) + b N_{l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + \frac{7}{2}}(kr) \right\}.$$

Für die Winkel α_1 und α_2 folgt

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1} \frac{d}{d\alpha_1} \left(\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 \frac{dA_1}{d\alpha_1} \right) - \left(\frac{l_1(l_1+1)}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{l_2(l_2+1)}{\sin^2 \alpha_1} \right) A_1 = -C_2 A_1, \\ \frac{1}{\cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2} \frac{d}{d\alpha_2} \left(\cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 \frac{dA_2}{d\alpha_2} \right) - \left(\frac{l_3(l_3+1)}{\sin^2 \alpha_2} + \frac{C_2}{\cos^2 \alpha_2} \right) A_2 = -C_1 A_2. \quad (A3.8)$$

mit $C_2 = (l_1 + l_2 + 2n + 2)^2 - 4$. Die Lösung A_1 ist die wohlbekannte Lösung $K_{l_1, l_2, n}$ aus Abschnitt (1.2). Die Lösung A_2 ist proportional zu ${}_2F_1(-n_2, l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + 4, l_3 + \frac{3}{2}, \sin^2 \alpha_2)$, ihre genauere Spezifikation erfolgt durch den formalen Übergang von l_1 zu $l_1 + l_2 + n_1 + 2$ in A_1 . Die gesamte Wellenfunktion ist

$$\Phi(R, \alpha_1, \alpha_2, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \varphi(R) A_1(\alpha_1) A_2(\alpha_2) \prod_{i=1}^3 Y_{l_i, m_i}(\Omega_i). \quad (A3.9)$$

Das Volumen- und Oberflächenelement im 9 dimensionalen Raum nimmt dann die folgende Gestalt an

$$d\tau = R^8 \cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 dR d\alpha_1 d\alpha_2 d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3, \\ d\sigma = R^8 \cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3. \quad (A3.10)$$

Für N-Körper erhalten wir nach der Separation^(der) Schwerpunktsbewegung ein System mit $n-1$ reduzierten Massen μ_{n-1} (siehe A1). Die gesamte Radialkoordinate für diese μ_{n-1} Massen ist definiert durch

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2. \quad (A3.11)$$

Wie wir oben gesehen haben sind die r_i nicht unabhängig voneinander, sondern durch $n-2$ Winkel α_r nach Maßgabe

$$\alpha_r = \arctg \frac{r_{r+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r r_i^2}} \quad (A3.12)$$

miteinander verkoppelt.

Für das Volumenelement und analog für das Oberflächenelement folgt:

$$d\tau = R^{(3n-4)} dR \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{\frac{3(n-i)-4}{2}} \alpha_{n-(i+1)} \cos^{\frac{3(n-i)-4}{2}} \alpha_{n-(i+1)} \prod_{i=1}^{n-1} d\Omega_i \quad (A3.12)$$

Die Lösungen der Radialgleichung für ein konstantes Potential und im potentialfreien Fall ist gegeben durch

$$f(R) = \frac{1}{R^{(3n-5)/2}} \cdot \left\{ A J_{\ell^{(n)}}(kR) + B N_{\ell^{(n)}}(kR) \right\} \quad (A3.13)$$

mit dem Kanalindex $\ell^{(n)}$

$$\ell^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} l_i + 2 \sum_{i=1}^{n-2} n_i + \frac{3n-5}{2} \quad (A3.14)$$

A4) Statistischer Faktor für eine (d,2N)-Reaktion

Für ein Compoundsystem zum Gesamtdrehimpuls J koppeln wir den Targetspin J_h mit dem Gesamtspin S der Projektile zum Kanalspin Σ . Diesen wiederum koppeln wir mit dem Gesamtdrehimpuls der Projektile schließlich zu J

$$\gamma_J^M = \left[\left[\psi_{J_h}^{M_h} \otimes \left[\chi_{s_1 m_{s_1}} \otimes \chi_{s_3 m_{s_3}} \right]_{m_s}^S \right]_{\mu_\Sigma}^\Sigma \otimes \left[Y_{l_1 m_1} \otimes Y_{l_3 m_3} \right]_{m_L}^L \right]_M^J.$$

Betrachten wir einmal den Fall mit $L=0$, dann ist der Gesamtdrehimpuls J gleich dem Kanalspin Σ . Dieses ist in der Tat der Fall für einlaufende Deuteronen bei kleiner Einfallenergie. Der Kanalspin Σ kann dann die Werte

$$|J_h - S| \leq \Sigma \leq |J_h + S|$$

annehmen. Jeder Wert Σ des Kanalspins kann sich auf $2\Sigma+1$ Arten im Raum orientieren, also insgesamt

$$Z = 2(J_h + 1) + 1 + 2(J_h - 1) + 1 + 2J_h + 1 = 3(2J_h + 1).$$

Mit dem Spin $S=1$ für das Deuteron erhalten wir

$$Z = (2S+1)(2J_h+1).$$

Mit andern Worten, wir haben also eine inkohärente Mischung von einfallenden Wellen in allen Z Eingangskanälen. Inkohärent deshalb, weil keine Phasenbeziehung zwischen den Wellen besteht. Ein unpolarisierter Strahl ist deshalb mit Z^{-1} zu wichten, da jede Partialwelle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.

$$g(\Sigma) = \frac{2\Sigma+1}{(2S+1)(2J_h+1)}.$$

Der Gewichtungsfaktor $g(\Sigma)$ gibt die relative Wahrscheinlichkeit an, den Kanalspin Σ zu finden.

A5 Matrixelemente im (2p2h)-Unterraum

Beim Standard-Hartree-Fock-Verfahren schreiben wir den Vielteilchen-Hamiltonoperator gemäß Gleichung (105). Der Grundzustand $|0\rangle$ eines A-Nukleonensystems ist dadurch charakterisiert, daß die tiefsten Einteilchen-Niveaus alle besetzt sind. Angeregte Kernzustände erzeugen wir durch Erzeugungsoperatoren für Teilchen (die Löcher vernichten), die wir mit ungeraden Zahlen spezifizieren (beispielsweise a_1^+) und für Löcher durch gerade Zahlen (beispielsweise a_2). Per definitionem stellt ein Loch-Zustand einen zeitumgekehrten Teilchen-Zustand dar und ist damit mit diesem automatisch antisymmetrisch. Die Phase erhalten wir aus der Konvention nach Bell [23]. Im allgemeinen besteht ein angeregter Kernzustand zum Gesamtdrehimpuls J und Isospin T , mit den Projektionen M und τ , durch Überlagerung von 1 Teilchen-1 Loch-, 2 Teilchen-2 Loch- Anregungen etc.

$$\Psi^{JM, T\tau} = \sum_{n=1}^r C_n |n p n h\rangle^{JM, T\tau} \quad (A5.1)$$

Für die Berechnung der Matrixelemente im Zweiteilchen-Raum sind einzig die Anteile mit $n=2$ von Interesse. Die Nomenklatur von Gleichung (111) wollen wir hier beibehalten. Ein solcher Zweiteilchen-Zustand zum Gesamtdrehimpuls J und der Projektion M schreibt sich

$$|\phi_{2\ 4}^{1\ 3}\rangle^{J, M} = a_1^+ a_3^+ a_4 a_2 |0\rangle \quad (A5.2)$$

und seine Norm ist $N = (1 + \delta_{13})(1 + \delta_{24})$.

Die Anti-Kommutatoren

$$[a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0, \\ [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$$

beinhalten automatisch die Antisymmetrie für Teilchenaustausch

$$a_1^+ a_3^+ a_5^+ \dots |0\rangle = -a_3^+ a_1^+ a_5^+ \dots |0\rangle$$

und das Ausschließungs-Prinzip

$$a_1^+ a_1^+ a_3^+ |0\rangle = 0.$$

Beachten wir diese Relationen, dann erhalten wir 20 Matrixelemente für die Restwechselwirkung V, vorausgesetzt alle Grundzustandskorrelationen werden ignoriert. Als Beitrag für die kinetische Energie, die schon auf Hauptdiagonale ist, erhalten wir die Differenz zwischen den Teilchen- und Loch-Energien eines (2p2h)-Zustandes.

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{24}^{13} | H | \Phi_{68}^{57} \rangle = & (\delta_{17} \delta_{35} - \delta_{15} \delta_{37}) (\delta_{46} \delta_{28} - \delta_{26} \delta_{48}) (\epsilon_1 + \epsilon_3 - \epsilon_6 - \epsilon_8) + \\ & (\delta_{15} \delta_{37} - \delta_{17} \delta_{35}) \langle 68 | V | \tilde{24} \rangle + (\delta_{26} \delta_{48} - \delta_{28} \delta_{46}) \langle 13 | V | \tilde{57} \rangle + \\ & \delta_{15} [\delta_{26} \langle 38 | V | \tilde{47} \rangle + \delta_{28} \langle 36 | V | \tilde{74} \rangle + \delta_{46} \langle 38 | V | \tilde{72} \rangle + \delta_{48} \langle 36 | V | \tilde{27} \rangle \\ & + \delta_{17} [\delta_{26} \langle 38 | V | \tilde{54} \rangle + \delta_{28} \langle 36 | V | \tilde{45} \rangle + \delta_{46} \langle 38 | V | \tilde{25} \rangle + \delta_{48} \langle 36 | V | \tilde{52} \rangle \\ & + \delta_{35} [\delta_{26} \langle 18 | V | \tilde{74} \rangle + \delta_{28} \langle 16 | V | \tilde{47} \rangle + \delta_{46} \langle 18 | V | \tilde{27} \rangle + \delta_{48} \langle 16 | V | \tilde{72} \rangle \\ & + \delta_{37} [\delta_{26} \langle 18 | V | \tilde{45} \rangle + \delta_{28} \langle 16 | V | \tilde{54} \rangle + \delta_{46} \langle 18 | V | \tilde{52} \rangle + \delta_{48} \langle 16 | V | \tilde{25} \rangle \end{aligned} \quad (A5.3)$$

Bei genauer Analyse dieser Elemente stellen wir fest, daß es zwei Gruppen von Matrixelemente gibt: Die eine enthält nur Teilchen oder Löcher und die andere sowohl Teilchen- als auch Lochzustände [20]. Wir berechnen deshalb nur ein Matrixelement aus jeder Gruppe und erhalten durch Permutation alle anderen

$$\begin{aligned} \delta_{15} \delta_{28} \langle 36 | V | \tilde{74} \rangle &= (-)^{j_6+j_8+J_h} P(68) \cdot M_{3847} \quad \text{mit } M_{3847} \equiv \langle 38 | V | \tilde{47} \rangle, \\ \delta_{15} \delta_{46} \langle 38 | V | \tilde{72} \rangle &= (-)^{j_2+j_4+I_h} P(24) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{15} \delta_{48} \langle 36 | V | \tilde{27} \rangle &= (-)^{j_2+j_4+j_6+j_8+I_h+J_h} P(24, 68) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{17} \delta_{26} \langle 38 | V | \tilde{54} \rangle &= (-)^{j_5+j_7+J_p} P(57) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{17} \delta_{28} \langle 36 | V | \tilde{45} \rangle &= (-)^{j_5+j_7+j_6+j_8+J_p+J_h} P(57, 68) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{17} \delta_{46} \langle 38 | V | \tilde{25} \rangle &= (-)^{j_2+j_4+j_5+j_7+I_h+J_p} P(24, 57) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{17} \delta_{48} \langle 36 | V | \tilde{52} \rangle &= (-)^{j_2+j_4+j_6+j_8+j_5+j_7+I_h+J_h+J_p} P(24, 57, 68) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{35} \delta_{26} \langle 18 | V | \tilde{74} \rangle &= (-)^{j_1+j_3+I_p} P(13) M_{3847}, \\ \delta_{35} \delta_{28} \langle 16 | V | \tilde{47} \rangle &= (-)^{j_1+j_3+j_6+j_8+I_p+J_h} P(13, 68) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{35} \delta_{46} \langle 18 | V | \tilde{27} \rangle &= (-)^{j_1+j_3+j_2+j_4+I_p+I_h} P(13, 24) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{35} \delta_{48} \langle 16 | V | \tilde{72} \rangle &= (-)^{j_1+j_3+j_2+j_4+j_6+j_8+I_p+I_h+J_h} P(13, 24, 68) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{37} \delta_{26} \langle 18 | V | \tilde{45} \rangle &= (-)^{j_1+j_3+j_5+j_7+I_p+J_p} P(13, 57) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{37} \delta_{28} \langle 16 | V | \tilde{54} \rangle &= (-)^{j_1+j_3+j_5+j_7+j_6+j_8+I_p+J_p+J_h} P(13, 57, 68) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{37} \delta_{46} \langle 18 | V | \tilde{52} \rangle &= (-)^{j_1+j_3+j_2+j_4+j_5+j_7+I_p+I_h+J_p} P(13, 24, 57) \cdot M_{3847}, \\ \delta_{37} \delta_{48} \langle 16 | V | \tilde{25} \rangle &= (-)^{j_1+j_3+j_2+j_4+j_5+j_7+j_6+j_8+I_p+I_h+J_p+J_h} P(13, 24, 57, 68) \cdot M_{3847}. \end{aligned} \quad (A5.4)$$

Die Restwechselwirkung V approximieren wir durch einen einfachen Ansatz, der keine Tensor- und hard-core-Anteile enthält

$$V(r_1, r_2) = V_0 \delta(r_1 - r_2) a_0 \quad (A5.5)$$

Die Konstanten werden wie folgt gewählt [24]

$$a_0 = 0.865 \text{ und die Stärke der Zweiteilchen-Kraft } V_0 = -1000 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3$$

In zero-range-Näherung erhalten wir für die Matrixelemente über die Teilchen, wenn wir von der Definition des $6j$ - und $9j$ - Symbols [25] Gebrauch machen

$$\begin{aligned} (\delta_{26} \delta_{48} - \delta_{28} \delta_{46}) \langle 13 | V | 5 \tilde{7} \rangle &= (\delta_{26} \delta_{48} + (-)^{j_6+j_8+J_h} \cdot P(68)) \cdot a_0 V_0 \hat{j}_1 \hat{j}_3 \hat{j}_5 \hat{j}_7 \cdot \\ &\hat{l}_1 \hat{l}_3 \hat{l}_5 \hat{l}_7 \sum_{\mathcal{Y} \mathcal{Z}} (2\mathcal{Y}+1)(2\mathcal{Z}+1) \left\{ \begin{matrix} l_1 l_3 \mathcal{Y} \\ j_1 j_3 J_p \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \mathcal{Z} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_5 l_7 \mathcal{Y} \\ j_5 j_7 J_p \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \mathcal{Z} \end{matrix} \right\} [(-)^{\mathcal{Y}} R_{l_1 l_3 l_5 l_7} \cdot \\ &(-)^{l_3} \delta_{l_7 l_3} \cdot \frac{(-)^{l_1} \delta_{l_5 l_1}}{\hat{l}_1} \left\{ \begin{matrix} l_1 l_5 0 \\ l_7 l_3 \mathcal{Y} \end{matrix} \right\} - (-)^{l_1+l_3} \cdot \frac{(-)^{l_1} \delta_{l_7 l_1}}{\hat{l}_1} \cdot \frac{(-)^{l_3} \delta_{l_5 l_3}}{\hat{l}_3} \left\{ \begin{matrix} l_1 l_7 0 \\ l_5 l_3 \mathcal{Y} \end{matrix} \right\} \cdot \\ &(-)^{1+J} \cdot R_{l_1 l_3 l_7 l_5}]. \end{aligned} \quad (A5.6)$$

Damit folgt für das Matrixelement über die Löcher:

$$\begin{aligned} (\delta_{15} \delta_{37} - \delta_{17} \delta_{35}) \langle 68 | V | 2 \tilde{4} \rangle &= (\delta_{15} \delta_{37} + (-)^{j_5+j_7+J_p} \cdot P(57)) \\ &P(18, 27, 36, 45, J_h J_p, I_h I_p) \cdot \langle 13 | V | 5 \tilde{7} \rangle \end{aligned} \quad (A5.7)$$

Matrixelemente über Teilchen und Löcher:

$$\begin{aligned} \delta_{15} \delta_{26} \langle 38 | V | 4 \tilde{7} \rangle &= \delta_{15} \delta_{26} V_0 a_0 \hat{j}_3 \hat{j}_4 \hat{j}_7 \hat{j}_8 \hat{l}_3 \hat{l}_4 \hat{l}_7 \hat{l}_8 \hat{J}_p \hat{I}_p \hat{J}_h \hat{I}_h (-)^{j_4+j_5+j_6+j_8} \\ &(-)^{l_4+l_8+J_h+I_h+J} \sum_{\mathcal{Z}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}} (-)^{\mathcal{Z}+\mathcal{X}} (2\mathcal{Y}+1)(2\mathcal{Z}+1)(2\mathcal{X}+1) \cdot \\ &\left\{ \begin{matrix} J_h I_h \mathcal{Y} \\ I_p J_p J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} I_p J_p \mathcal{Y} \\ j_7 j_3 j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_7 j_3 \mathcal{Y} \\ j_4 j_8 \mathcal{X} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_4 j_8 \mathcal{Y} \\ J_h I_h j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_3 l_4 \mathcal{Y} \\ j_3 j_4 \mathcal{X} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \mathcal{Z} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_7 l_8 \mathcal{Y} \\ j_7 j_8 \mathcal{X} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \mathcal{Z} \end{matrix} \right\} [(2\mathcal{Z}+1) \cdot \\ &\cdot R_{l_3 l_8 l_7 l_4} \left\{ \begin{matrix} l_3 l_7 0 \\ l_8 l_4 \mathcal{Y} \end{matrix} \right\} \frac{(-)^{l_3} \delta_{l_7 l_3}}{\hat{l}_3} \cdot \frac{(-)^{l_4} \delta_{l_8 l_4}}{\hat{l}_4} - 2 \delta_{\mathcal{Z}0} R_{l_3 l_8 l_4 l_7} \frac{(-)^{l_3} \delta_{l_4 l_3}}{\hat{l}_3} \frac{(-)^{l_7} \delta_{l_8 l_7}}{\hat{l}_7}]. \end{aligned} \quad (A5.8)$$

Hierbei wurden folgende Abk. benutzt:

Mit einer Tilde den Austauschterm zu $|ij\rangle$

$$|\tilde{ij}\rangle = |ij\rangle - |ji\rangle ,$$

mit $\wedge$ die Größe

$$\hat{\lambda} = \sqrt{2x+1}$$

und für die Radialmatrixelemente im Ortsraum R_{ijkl} .

A6) Umkopplungskoeffizient

In der Schalenmodell-Beschreibung der Kernreaktionen werden die Eigenwerte des Vielteilchen-Hamiltonoperators, im Zweiteilchen-Unterraum, in einer Basis bestimmt, mit dem folgenden Kopplungs-Schema

$$y_{JJ_p J_h}^M = \left[\left[\left[l_2 \otimes s_2 \right]_{m_2}^{j_2} \otimes \left[l_4 \otimes s_4 \right]_{m_4}^{j_4} \right] \otimes \left[\left[l_1 \otimes s_1 \right]_{m_1}^{j_1} \otimes \left[l_3 \otimes s_3 \right]_{m_3}^{j_3} \right] \right]_{M_p}^{J_p} \cdot \quad (A6.1)$$

Wie früher verabredet, stehen die geraden Zahlen für die relevanten Quantenzahlen der Löcher und die ungeraden für die ^{def} Teilchen. Den Drehimpuls j_2 vom Loch "2" koppeln wir mit dem Drehimpuls j_4 zum Zwischendrehimpuls J_h , den beispielsweise ein gg -Kern hätte, dem zwei Teilchen zur vollen Schale fehlen. Mit der entsprechenden Teilchen-Kopplung zu J_p , erhalten wir schließlich aus J_h und J_p den Gesamtdrehimpuls J mit seiner Projektion M . Die R-Matrixelemente, und damit die S-Matrixelemente, werden nach dem $j j$ -Kopplungs-Schema berechnet. Der Reaktionsquerschnitt wird aber in der Kanalspindarstellung ermittelt

$$y_{J L \Sigma}^M = \left[\left[J_h \otimes [s_1 \otimes s_3]_{m_{s_{13}}}^{s_{13}} \right]_{\mu_{\Sigma}}^{\Sigma} \otimes [l_1 \otimes l_3]_{m_L}^L \right]_{M}^J \quad (A6.2)$$

In diesem Schema wird der Spin J_h mit dem Spin der beiden Teilchen zum Kanalspin Σ und seiner Projektion μ_{Σ} gekoppelt, der seinerseits mit dem Gesamtdrehimpuls der Teilchen den Gesamtdrehimpuls J mit M ergibt. Aus den beiden Schemata sehen wir, daß eine Umkopplung von 4 Drehimpulsen erforderlich ist. Zunächst untersuchen wir Gl. (A6.2) näher

$$\tilde{y}_{J L \Sigma}^M = \sum_{\mu_{\Sigma}, m_L} (\Sigma L J | \mu_{\Sigma} m_L M) \cdot \varphi(J_h, s_{13}, \Sigma, \mu_{\Sigma}) \cdot \varphi(l_1, l_3, L, m_L)$$

Tilde bedeutet hier, daß wir die nicht notwendigen Radialfunktionen unterdrückt haben. Die weitere Zerlegung führt auf

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{J L \Sigma}^M &= \sum_{\substack{\mu_{\Sigma} m_L m_{l_1} m_{l_3} \\ \mu_1 \mu_3 m_{13} M_h}} (\Sigma L J | \mu_{\Sigma} m_L M) (l_1 l_3 L | m_{l_1} m_{l_3} m_L) (J_h s_{13} \Sigma | M_h m_{13} \mu_{\Sigma}) \\ &\quad (s_1 s_3 s_{13} | \mu_1 \mu_3 m_{13}) \psi_{J_h}^{M_h} \chi_{s_1 \mu_1} \chi_{s_3 \mu_3} Y_{l_1 m_{l_1}} Y_{l_3 m_{l_3}} \phi_{\nu \Sigma} \end{aligned} \quad (A6.3)$$

Insgesamt folgt damit

$$|\phi_{24}^{13}\rangle_{\Sigma, L}^{J, M} = \tilde{y}_{JL\Sigma}^M |1\rangle|3\rangle. \quad (A6.4)$$

Entwickeln wir diese Funktion nach Funktionen der Gl. 104.1 in der (J_p, J_h) -Darstellung, dann ergibt sich

$$|\phi_{24}^{13}\rangle_{\Sigma, L}^{J, M} = \sum_{s_{13}, \Sigma, L} K_{\Sigma L, J_p J_h}^J |\phi_{24}^{13}\rangle_{J_p, J_h}^{J, M} \quad (A6.5)$$

mit

$$K_{\Sigma L, J_p J_h}^J = \sum_{\substack{m_{l_1}, m_{l_3}, \mu_1, \mu_3, \\ m_1, m_3, M_h, \mu_\Sigma, M_p, m_L, m_{13}}} (J_h J_p J | -M_h M_p M) (j_1 j_3 J_p | m_1 m_3 M_p) \cdot \quad (A6.6)$$

$$\cdot (L_1 s_1 j_1 | m_{l_1} \mu_1 m_1) \cdot (l_3 s_3 j_3 | m_{l_3} \mu_3 m_3) (\Sigma L J | \mu_\Sigma m_L M).$$

$$(l_1 l_3 L | m_{l_1} m_{l_3} m_L) (J_h s_{13} \Sigma | M_h m_{13} \mu_\Sigma) (s_1 s_3 s_{13} | \mu_1 \mu_3 m_{13})$$

Eine Umformung der Gl. (A6.6) mit der Definition des $6j$ - und $9j$ -Symbols [25], liefert schließlich den gewünschten Transformations-Koeffizient in einer handlichen Form

$$K_{\Sigma L, J_p J_h}^J = (-)^{2s_3 + j_3 - j_1 + L + \Sigma + J} \hat{s}_{13} \hat{j}_1 \hat{j}_3 \hat{L} \hat{\Sigma} \hat{J}_p \left\{ \begin{matrix} J_p & J_h & J \\ \Sigma & L & s_{13} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & J_p \\ l_1 & l_3 & L \\ s_1 & s_3 & s_{13} \end{matrix} \right\}. \quad (A6.7)$$

Tabelle I : Korrelationsfunktion

$$(l_1, l_3, n) \quad \sqrt{\frac{2(l_1 + l_3 + 2n + 2)}{\sin 2\alpha}} \cdot d^{\frac{1}{2}(l_1 + l_3 + 1) + n} \quad (2\alpha)$$

$$(l_1, l_3, 0) \quad \left(\frac{\Gamma(l_1 + l_3 + 3)}{\Gamma(l_1 + \frac{3}{2})\Gamma(l_3 + \frac{3}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin^{l_3} \alpha \cdot \cos^{l_1} \alpha$$

$$(l_1, l_3, 1) \quad \left(\frac{\Gamma(l_1 + l_3 + 4)}{4\Gamma(l_1 + \frac{5}{2})\Gamma(l_3 + \frac{5}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin^{l_3} \alpha \cdot \cos^{l_1} \alpha \cdot \{ 2l_3 + 3 - 2(l_1 + l_3 + 2) \cdot \sin^2 \alpha \}$$

$$(0, 0, 0) \quad 2/\pi$$

$$(0, 0, n) \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$(0, 1, n) \quad \left(\frac{2(n+2)}{\pi(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \sin 2\alpha} \left[\sin[2(n+1)\alpha] - \frac{n+1}{n+2} \sin[2(n+2)\alpha] \right]$$

Tabelle II: Austauschterm

(ℓ_1, ℓ_3, n)	$(-)^n \sqrt{\frac{2(\ell_1 + \ell_3 + 2n + 2)}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_3 + 1) + n} (\pi - 2\alpha)^{\frac{1}{2}(\ell_3 - \ell_1) - \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_3 + 1)}$
$(0, 0, n)$	$(-)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$
$(1, 0, n)$	$(-)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{2}{\cos^2 \alpha} \left[\frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{4(n+1)\sin \alpha} + \cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$
$(0, 1, n)$	$(-)^n 2(2n+3) \sqrt{\frac{n+1}{2\pi(n+2)}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \left[\frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1)\sin \alpha} - 2\cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{(2n+3)\sin 2\alpha} \right]$
$(2, 0, n)$	$(-)^n 4 \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+3)(2n+3)(2n+5)}} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} \left[\frac{3}{2} - (n+1)(2n+3)\cos^2 \alpha \right] \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{4(n+1)\sin \alpha} + \left(\frac{3}{2} + (2n+3)\cos^2 \alpha \right) \cos^2 \alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$
$(1, 1, n)$	$(-)^n 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha} \left[\left(\frac{1}{2} + (n+1)\cos^2 \alpha \right) \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1)\sin \alpha} - \cos^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$

$$(2, 1, n) \quad (-1)^n 2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+2)(n+3)(n+4)}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \left[\left(\frac{3}{4} - (n+1)^2 \cos^2 \alpha + 2(n+1)(n+2) \cos^4 \alpha \right) \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1) \sin \alpha} + \right.$$

$$\left. ((3+n) \cos^2 \alpha - \left(\frac{3}{2} + 2(n+2) \cos^2 \alpha \right) \cos 2\alpha) \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$$

$$(1, 2, n) \quad (-1)^n 4 \sqrt{\frac{n+1}{2\pi(n+2)(n+3)(n+4)}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \left[\left(\frac{1}{4} (2n+5) + (n+1) \cos^2 \alpha [2n+5 - 2(n+2) \cos^2 \alpha] \right) \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1) \sin \alpha} + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} (2n+5) \cos 2\alpha + [n+3 - 2(n+2) \cos 2\alpha] \cos^2 \alpha \right) \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$$

$$(0, 2, n) \quad (-1)^n 2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi(n+3)(2n+3)(2n+5)}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha} \left[(n+3 - \left[\frac{1}{2} + (n+1) \cos^2 \alpha \right] (2n+3)) \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1) \sin \alpha} - \right.$$

$$\left. (3 + (2n+3)(1 - \cos 2\alpha)) \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha} \right]$$

$$(2, 2, n) \quad (-1)^n 4 \sqrt{\frac{2(n+1)(n+4)}{\pi(n+2)(n+5)}} \cdot \frac{1}{(2n+5) \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha} \left[\left(\frac{1}{n+4} \left\{ \frac{3}{2} + (2n+5) \cos^2 \alpha \right\} \left\{ \frac{2n+5}{4} + (n+1) \cos^2 \alpha [2n+5 - \right. \right.$$

$$\left. \left. 2(n+2) \cos^2 \alpha \right] \right\} - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cdot [n+3 - \left\{ \frac{1}{2} + (n+1) \cos^2 \alpha \right\} (2n+3)] \right) \cdot \frac{\sin[2(n+1)\alpha]}{2(n+1) \sin \alpha} -$$

$$\left(\frac{1}{n+4}\right)\left\{\frac{3}{2}+(2n+5)\cos^2\alpha\right\}\left\{\frac{1}{2}(2n+5)\cos 2\alpha+[n+3-2(n+2)\cos 2\alpha]\cos^2\alpha-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\cos^2\alpha\cdot[3+(2n+3)(1-\cos 2\alpha)]\cos^2\alpha\frac{\sin[(2n+3)\alpha]}{\sin 2\alpha}\right]$$

Tabelle III: Korrelationskoeffizienten

III 1

$\lambda_2 d_{3/2}$	$\lambda_1 d_{5/2}$	-0.451110	-0.129708	-0.072430	-0.057638	-0.038092	-0.030457
-0.137352	-0.237081	-0.753720	-0.199058	-0.109284	-0.088700	-0.057655	-0.046486
-0.076859	-0.223149	-0.043562	-0.022178	-0.019694	-0.011867	-0.009983	-0.005467
-0.044679	-0.128399	-0.018017	-0.009130	-0.008194	-0.006502	-0.004150	-0.002699
-0.032472	-0.064534	-0.011812	-0.005961	-0.004434	-0.002635	-0.002238	
-0.022524	-0.051362	-0.009734	-0.004908				
-0.017862							

III 2

$\lambda_2 d_{3/2}$	$\lambda_1 d_{5/2}$	-0.355738	-0.159524	0.341995	0.040438	0.003553	0.024094	0.007541
		-0.099104	0.284830	0.208407	-0.034595	-0.019826	-0.001266	-0.006456
		0.214219	0.249273	-0.018743	-0.080073	-0.030658	-0.030332	-0.018366
		0.027034	-0.0222681	-0.071535	-0.034864	-0.017065	-0.014066	-0.009173
		0.011921	-0.006775	-0.036180	-0.019039	-0.010171	-0.006953	-0.005462
		0.016778	0.004111	-0.028936	-0.015107	-0.006444	-0.005851	-0.003491
		0.006525	-0.002093	-0.018863	-0.009816	-0.005290	-0.003558	-0.002774

III 3

$\lambda_1 d_{5/2}$

$\lambda_2 d_{3/2}$

-0.326642	0.103562	0.007944	-0.216715	-0.012424	0.008598	-0.013775
0.174137	-0.072031	-0.257859	+0.050841	0.083057	0.027793	0.023721
0.031744	-0.227814	0.146769	0.225485	0.055121	0.028413	0.025834
-0.167706	-0.001621	0.228849	0.028729	0.000799	0.007784	0.004316
-0.017799	0.065830	0.053102	0.008692	-0.004970	0.002553	-0.002507
0.001771	0.023175	0.033625	0.007148	0.002619	-0.002091	0.001614
-0.016306	0.018295	0.026399	0.006179	-0.002979	0.001618	-0.001167

Literaturverzeichnis

- [1] Eisenberg, T.M., and W. Greiner, Nuclear Theory, Vol. 3:
Microscopic Theory of the Nucleus
(erscheint: North-Holland Publ. Comp.,
Amsterdam 1971).
- [2] Weinberg, S.: Phys. Rev. 133, B232 (1964).
Greider, K.R. and L.R. Dodd: Phys. Rev. 146, 671 (1966).
Rihan, T.H.: Phys. Rev. 164, 1247 (1967).
Mac Dowell, M.R.C. and T.P. Coleman: Introduction to the
Theory of Ion-Atomic Collisions (1970) and
references therein.
Beregi, P. and I. Lovas: Z. Physik 241, 410 (1971).
- [3] Lane, A.M. and R.G. Thomas: Rev. Mod. Phys. 30, No 2, Part I (1958).
- [4] Danos, M. and W. Greiner: Phys. Rev. 138, B93 (1965).
Danos, M. and W. Greiner: Phys. Rev. 146, 708 (1966).
Wahsweiler, H.G., W. Greiner and M. Danos: Phys. Rev. 170, 893 (1968).
Delsanto, P.P., M.F. Roetter and H.G. Wahsweiler: Z. Phys. 222,
67 (1969).
Greiner, W. in: Cargese Lectures in Physics, Vol. 3 (1969),
ed. M. Jean, Gordon and Breach Science Publishers,
New York.
- [5] Feshbach, H.: Ann. Phys. 5, 357 (1958); 19, 287 (1962).
- [6] Danos, M. and W. Greiner: Z. Phys. 202, 125 (1967).
- [7] Faddeev, L.D.: Mathematical Aspects of the Three-Body Problem
in the Quantum Scattering Theory (1965).
Rihan, T.H.: International Atomic Energy Agency, IC/68/60 (1968).
- [8] Edmonds, A.R.: Drehimpulse in der Quantenmechanik BI (1960).
- [9] Morse, P.M. and H. Feshbach: Methods of theoretical physics,
Cambridge, Mass.: MIT Press 1946; Chap. 12.3
New York; Mac Graw-Hill Book Co. 1953.
Delves, L.M.: Nucl. Phys. 8, 358 (1958); 9, 391 (1958/59); 20, 275 (1960).
- [10] Witteraker, E.T. and G.N. Watson: A Treatise on the Theory of
Bessel Functions, Camb. V. Press (1958).
- [11] Bloch, C.: Nucl. Phys. 4, 504 (1957).
- [12] Abramowitz, M. and I.A. Stegun: Handbook of Mathematical
Functions, Dover Publications, New York (1965).
- [13] Rock, T.R. and L.T.B. Goldfarb: Nucl. Phys. 27, 79 (1961).
Gückel, F.A., H.W. Franz and D. Fick: Z. Physik 214, 321 (1968).

- [14] Baz, A.I.: Advanc. Phys. 8, 349 (1959).
- [15] Petzold, R.: Diplomarbeit, Universität Frankfurt a.M. (1971).
Lejeune, A. and C. Mahaux: Nucl. Phys. A145, 613 (1970).
- [16] Wahsweiler, H.G.: Habilitationsschrift Universität Frankfurt a.M.
(1967).
- [17] Wapstra, A.H.: Handbuch der Physik, Band 28/1, Seite 1.
(Herausgegeben von S. Flügge, Springer-Verlag, 1958).
- [18] Wild, W.: Z. Phys. 202, 220 (1967).
- [19] Mahaux, C. and H.A. Weidenmüller: Shell-Modell Approach to
Nuclear Reactions, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.
- [20] Eisenberg, T.M., B.M. Spicer and M.E. Rose: Nucl. Phys. 71, 273 (1965).
- [21] Eisenbud, L. and E.P. Wigner: Phys. Rev. 72, 29 (1947).
- [22] Badalyan, A.M. and Yu. A. Simonow: Sov. T. Nucl. Phys. 3, 755 u. 461 (1966).
- [23] Bell, T.S.: Nucl. Phys. 12, 117 (1959).
- [24] Gillet, V. and N.V. Mau: Nucl. Phys. 54, 321 (1964).
- [25] de-Shalit, A. and I. Talmi: Nuclear Shell Theory, Academic Press,
New York and London (1963).
- [26] Wigner, E.P. in: Facets of Physics, ed. D.A. Bromley and V.W. Hughes,
Academic Press, New York and London (1970).
- [27] Feshbach, H.: Ann. Phys. 5, 357 (1958); 19, 287 (1962).
Lemmer, R. and C. Shakin: Ann. Phys. 27, 13 (1964).
- [28] Zickendraht, W.: Ann. Phys. 35, 18 (1965).
- [29] Ruder, H.: Zeitschrift für Naturforschung, Band 23a, 579 u. 562 (1968).
- [30] Simonow, Yu. A.: Sov. T. Nucl. Phys. 7, 722 (1968) and references therein.
- [31] Grynberg, M. and Z. Koba: Ann. Phys. 26, 418 (1964).
- [32] Fano, U.: Phys. Rev. 124, 1866 (1961).
Weidenmüller, H.A.: Nucl. Phys. 75, 189 (1965).
- [33] Fabre, M. de la Ripelle: Preprint Institut de Physique Nucleaire
Division de Physique Theorique, IPNO/TH182.
- [34] Kapur, P.L. and R. Peierls: Proc. Royal Society of London, Series A,
Vol. 166, 277 (1938).
- [35] Weber, H.J. and W. Greiner: Zeitschrift für Naturforschung, Band 24a,
736 (1969).
- [36] Blatt, J.M. and L.C. Biedenharn: Rev. Mod. Phys. 24, 258 (1952).

Meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. W. Greiner, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für konstruktive Hinweise, die zum Gelingen der Arbeit beitrugen.

Ferner danke ich Herrn Professor Dr. M. Danos vom National Bureau of Standards, Washington, D.C., für wertvolle Ratschläge bei der Durchführung. Den Herren Privat-Dozenten Dr. H.G. Wahsweiler und Dr. W. Scheid sei gedankt für anregende und aufmunternde Diskussionen. Mein Dank gilt weiterhin Herrn Dr. D. Scharnweber für seine Bereitschaft zu klärenden Erörterungen, die mir halfen, die schwierige Numerik zu bewältigen.

Für die freundliche Hilfe bei der Fertigstellung des Manuskriptes danke ich Frau Bielfeldt, und für die Ausführung der Druckarbeiten danke ich Herrn Brose.

Dem Zentralen Recheninstitut der Universität Frankfurt möchte ich danken, das mir zahlreiche Stunden auf der UNIVAC 1108 zur Verfügung stellte.

Lebenslauf

Am 24. Juli 1939 wurde ich als Sohn des Arbeiters Franz Grauel (1941 verstorben) und seiner Ehefrau Sophia, geb. Faust, in Bad Homburg geboren. Nach der Grundschule begann ich mit einer Werkzeugmacher-Lehre in der Maschinenfabrik Werner Reimers K.G., Bad Homburg, die ich 1957 beendete. Eine anschließende praktische Tätigkeit endete im Herbst 1959 mit dem Besuch der Staatlichen Ingenieurschule in Frankfurt am Main, an der ich im Sommer 1962 die Ingenieur- und Hochschulreife-Prüfung ablegte. Im Wintersemester des gleichen Jahres begann ich mit dem Studium der Physik an der TH Darmstadt. Meine Diplomarbeit fertigte ich im Institut für theoretische Physik unter Leitung von Professor Dr. O. Scherzer an. Im Juni 1965 bestand ich die Vordiplom- und im Juli 1967 die Diplomprüfung. Seit Oktober 1967 arbeite ich bei Professor Dr. W. Greiner im Institut für theoretische Physik der Universität Frankfurt. Mit der Verwaltung einer wissenschaftlichen Assistentenstelle wurde ich am 1. Januar 1969 beauftragt, zwei Jahre später wurde ich wissenschaftlicher Mitarbeiter.

Meine akademischen Lehrer waren die Herrn Professoren Becker, Brix, v. Buttler, Drechsel, Graf, Greiner, Hellwege, Huber, Kohlschütter, Marguerre, Scherzer, Schmieden, Schopper, Walther, Zinke.

